Feuille d'exercices n° 26 : espaces préhilbertiens.

MPSI Lycée Camille Jullian

7 juin 2022

Exercice 1 (* à **)

Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires :

1. $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\ dt$ sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\ dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
3. $(P,Q) \mapsto P(1)Q(1) + P'(2)Q'(2) + P''(0)Q''(0)$ sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.
4. $(P,Q) \mapsto \int_0^{2\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\ dt$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. $((u_n),(v_n)) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, sur $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\right\}$.

Exercice 2 (*)

Orthonormaliser à l'aide de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1. $\mathcal{F} = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
2. (f,g,h), où $f(t) = 1$, $g(t) = t$ et $h(t) = |t|$, dans $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\ dt$.
3. $(1, X, X^2, X^3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $P \cdot Q = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$.

Exercice 3 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et on pose $u = (1,2,2)$, $v = (-1,4,1)$ et $w = (2,5,1)$.

1. Vérifier que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser la base (u,v,w) en appliquant le procédé de Gram-Schmidt.
3. On note $F = \text{Vect}(u,v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F (qu'on notera p).
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion s par rapport à E.

Exercice 4 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $P \cdot Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\ dt$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

4. En déduire la valeur de $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 + at^2 + bt + c)^2 \, dt$.
5. Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives sur $[-1, 1]$ de la fonction cube et de son projeté orthogonal calculé à la question 3. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 5 (***)

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall u \in E$, $\|p(u)\| \leqslant \|u\|$.

Exercice 6 (**)

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Préciser à quelle condition cette inégalité devient une égalité.

Exercice 7 (**)

Montrer les inégalités suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{(n+1)2^n}$.
2. si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Quand a-t-on égalité ?
3. si f est continue strictement positive sur $[0, 1]$, $\left(\int_0^1 f(t) \, dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(t)^3 \, dt \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)} \, dt$.
4. si f est continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(t) \, dt = 1$, alors $\int_a^b \frac{1}{f(t)} \, dt \geqslant (b-a)^2$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 8 (***)

On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$). On pose, $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t) \, dt$. On notera par ailleurs $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$, et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur l'espace E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Donner une expression explicite de la projection orthogonale sur G.
4. On note enfin $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
   (a) Exhiber une fonction $f_0 \in E_{a,b}$, calculer sa projection orthogonale sur F et montrer que $E_{a,b} = \{f_0 + h \mid h \in F\}$ (quelle structure a-t-on ainsi défini sur l'ensemble $E_{a,b}$?).
   (b) Déterminer la valeur de $\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t)) \, dt$.

Exercice 9 (**)

Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire défini par $P \cdot Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E.
2. Calculer $X^i \cdot X^j$pour tous entiers $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.
3. En déduire une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
4. Déterminer le projeté orhogonal d'un polynôme quelconque P sur $\mathbb{R}_k[X]$, pour $k < n$.

Exercice 10 (*)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on pose $F = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F, puis de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

Exercice 11 (*)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, on note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Calculer la projection orthogonale d'une matrice M sur F.
3. Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à F.

Exercice 12 (**)

On souhaite calculer $m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 \, dt$.

1. Calculer m en utilisant la une distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien.
2. Retrouver la valeur de m par une méthode directe.
3. Calculer de même (avec deux méthodes !) $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \, dx$.

Exercice 13 (***)

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs dans un espace euclidien E. On appelle matrice de Gram de la famille la matrice $(u_i \cdot u_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et déterminant de Gram son déterminant, noté $G(u_1, \dots, u_n)$.

1. Exprimer la matrice de Gram en fonction de la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale quelconque de E.
2. Montrer que $\ker(M^\top M) = \ker(M)$, en déduire que la matrice de Gram a le même rang que la famille $(u_1, \dots, u_n)$.
3. En déduire que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ n'est pas libre.
4. Montrer que, si $u_n \in (\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1}))^\perp$, alors $G(u_1, \dots, u_n) = G(u_1, \dots, u_{n-1}) \times \|u_n\|^2$.
5. Si F est un sous-espace de E de base $(f_1, \dots, f_k)$, montrer que, pour tout vecteur $u \in E$, $d(u,F) = \sqrt{\dfrac{G(f_1, \dots, f_k, u)}{G(f_1, \dots, f_k)}}$.

Exercice 14 (***)

Soient $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ des vecteurs distincts d'un espace euclidien de dimension n vérifiant $\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, k\}^2$, $i \neq j \Rightarrow u_i \cdot u_j < 0$. Montrer que $k \leqslant n+1$ (autrement dit, on ne peut pas placer plus de $n+1$ vecteurs en dimension n faisant des angles deux à deux obtus).

Exercice 15 (***)

Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on définit une forme bilinéaire par $\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n P(t)Q(t)e^{-t} \, dt$.
On posera par ailleurs, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = x^n e^{-x}$, et $h_n(x) = e^x f^{(n)}(x)$.

1. Calculer h_0, h_1, h_2, h_3 et représenter dans un même repère l'allure des courbes représentatives de ces polynômes sur l'intervalle $[0,1]$.

2. Justifier que h_n est toujours une fonction polynômiale, et calculer explicitement ses coefficients.
3. Vérifier que φ définit un produit scalaire sur E.
4. Montrer que la famille $(h_0, \dots, h_n)$ est toujours une famille orthogonale.
5. Calculer $\|h_n\|$, en déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ.
6. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ (on précisera le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ lors du calcul).

Exercice 16 (*)

Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ -2 & -6 & c \\ 6 & a & d \end{pmatrix}$. Déterminer des valeurs de a, b, c et d telles que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 17 (**)

Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques des deux endormorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$a)\ \ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \ B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (***)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

Problème (***)

On s'intéresse dans cet exercice à une famille célèbre de polynômes, les polynômes de Legendre, définis de la façon suivante : pour tout entier naturel n, on pose $P_n = (X^2-1)^n$, puis $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}P_n^{(n)}$ (ce sont les polynômes L_n qui sont appelés polynômes de Legendre). On notera par ailleurs, pour tout polynôme P, $f(P) = ((X^2-1)P')'$.

1. Calculer explicitement L_0, L_1, L_2 et L_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes L_n, et vérifier que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer la parité des polynômes L_n.
4. Montrer que $L_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^k(X+1)^{n-k}$, en déduire la valeur de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
5. Montrer que $P'_{n+1} - 2(n+1)XP_n = 0$, puis que $(X^2-1)P'_n - 2nXP_n = 0$.
6. En déduire que $L'_{n+1} = XL'_n + (n+1)L_n$, et que $f(L_n) = n(n+1)L_n$. Donner la matrice de $f_{|\mathbb{R}_n[X]}$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.
7. On pose désormais, $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$.
   (a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que $\varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q))$.
   (c) Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale pour φ.
   (d) Montrer que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.
   (e) Calculer la distance de X^{n+1} à $\mathbb{R}_n[X]$.