Feuille d'exercices n° 22 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

15 avril 2022

Exercice 1 (**)

- Puisque $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ (factorisation triviale), on peut décomposer la fraction sous la forme $F = E + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$. Ici, la partie entière est une constante (quotient de deux polynômes de même degré) qu'on peut simplement calculer en faisant le quotient des coefficients dominants, ici on a donc $E = 1$ (si vouq n'êtes pas convaincus, la division euclidienne est de toute façon triviale : $X^2+2X+5 = 1\times(X^2-3X+2)+5X+3$. Il reste donc à décomposer $\dfrac{5X+3}{(X-1)(X-2)}$ sous la forme $\dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$. On calcule les coefficients par la méthode habituelle (multiplication par $X-1$ puis on pose $X=1$ pour obtenir a, et de même pour b) ou en appliquant la formule vue en cours : la dérivée du dénominateur vaut $2X-3$, donc $a = \dfrac{5+3}{2-3} = -8$, et $b = \dfrac{10+3}{4-3} = 13$. Finalement, $F = 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$.
- Il n'y a pas de partie entière à calculer, la décomposition sera de la forme $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{(X+1)^2}$. On peut utiliser les formules données en remarque dans le cours pour les pôles multiples : $X^2F = \dfrac{3X-1}{(X+1)^2} = \dfrac{3X-1}{X^2+2X+1}$. En notant G cette fraction, $b = G(0) = -1$, et on calcule $G' = \dfrac{3(X+1)^2 - 2(X+1)(3X-1)}{(X+1)^4}$ pour obtenir $a = G'(0) = \dfrac{3+2}{1^4} = 5$. De même, on calcule $(X+1)^2F = \dfrac{3X-1}{X^2}$. En notant H cette nouvelle fraction, on a $d = H(-1) = -4$, puis $H' = \dfrac{3X^2 - 2X(3X-1)}{X^4}$, donc $c = H'(-1) = \dfrac{3-8}{(-1)^4} = -5$. Conclusion : $F = \dfrac{5}{X} - \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{5}{X+1} - \dfrac{4}{(X+1)^2}$. Méthode alternative plus traditionnelle : on calcule b et d par les méthodes classiques : multiplier par X^2 puis poser $X = 0$ donne $b = -1$, multiplier par $X+1$ puis poser $X = -1$ donne $d = -4$. Ensuite, on peut tout multiplier par X puis regarder la limite en $+\infty$ pour obtenir $0 = a+c$. Enfin, on évalue pour une valeur pas trop pénible de X, par exemple $X = 1$, pour trouver $\dfrac{2}{4} = a + b + \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{4}$, donc $\dfrac{1}{2} = a - 1 - \dfrac{a}{2} - 1$, donc $\dfrac{5}{2} = \dfrac{a}{2}$ qui permet de retrouver $a = 5$ et donc $c = -5$. La conclusion est bien sûr la même.
- Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ et pour racines $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$ et $z_2 = \overline{j} = j^2$. Puisqu'il n'y a pas de partie entière à calculer, la décomposition sera donc de la forme $F = \dfrac{a}{X-j} + \dfrac{\overline{a}}{X-j^2}$. On calcule par exemple le coefficient a en exploitant la dérivée : $a = \dfrac{1}{2j+1} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}} = -\dfrac{i\sqrt{3}}{3}$. Conclusion : $F = \dfrac{i\sqrt{3}}{3(X-j^2)} - \dfrac{i\sqrt{3}}{3(X-j)}$.
- Un cas très classique ici, sans partie entière : $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X-3}$. On peut calculer les coefficients par la méthode classique : produit par $X-1$ puis $X = 1$ pour obtenir $a = \dfrac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$, produit par $X-2$ puis $X = 2$ pour obtenir $b = \dfrac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$ et produit par $X-3$ puis $X = 3$ pour obtenir $c = \dfrac{3^2+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Conclusion : $F = \dfrac{1}{X-1} -$

$\dfrac{5}{X-2} + \dfrac{5}{X-3}$.

- Pas grand chose de très original ici non plus, $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2}$. On calcule a en multipliant par X avant de poser $X = 0$: $a = \dfrac{2}{(0-1)^2} = 2$. Ensuite on peut calculer $G = (X-1)^2 F = \dfrac{2}{X}$, donc $G' = -\dfrac{2}{X^2}$ pour calculer très facilement $c = G(1) = 2$ et $b = G'(1) = -2$. Finalement, $F = \dfrac{2}{X} - \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2}$.
- La fraction (qu'on va noter F comme d'habitude) a trois pôles doubles : 1, j et j^2. On aura donc une décomposition de la forme $F = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X-j} + \dfrac{d}{(X-j)^2} + \dfrac{\overline{c}}{X-j^2} + \dfrac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}$ (la fraction est à coefficients réels, d'où les coefficients conjugués pour les quatre derniers termes). Notons en passant que $(X-j)(X-j^2) = X^2+X+1$ en exploitant le fait que $j^3 = 1$ et surtout $1+j+j^2 = 0$. On peut donc écrire que $G = (X-1)^2 F = \dfrac{3}{(X^2+X+1)^2}$, et $G' = -\dfrac{6(2X+1)}{(X^2+X+1)^3}$. En particulier, $b = G(1) = \dfrac{3}{3^2} = \dfrac{1}{3}$, et $a = G'(1) = -\dfrac{6 \times 3}{3^3} = -\dfrac{2}{3}$. Le plus simple pour calculer les coefficients restants est de constater que $F(jX) = F(X)$ (c'est évident puisque $j^3 = 1$). Or, en reprenant notre forme générale, $F(jX) = \dfrac{a}{jX-1} + \dfrac{b}{(jX-1)^2} + \dfrac{c}{jX-j} + \dfrac{d}{(jX-j)^2} + \dfrac{\overline{c}}{jX-j^2} + \dfrac{\overline{d}}{(jX-j^2)^2} = \dfrac{j^2a}{X-j^2} + \dfrac{jb}{(X-j^2)^2} + \dfrac{j^2c}{X-1} + \dfrac{jd}{(X-1)^2} + \dfrac{j^2\overline{c}}{X-j} + \dfrac{j\overline{d}}{(X-j)^2}$ (on exploite à chaque fois le fait que $j^3 = 1$ en multipliant en haut et en bas par j ou j^2). L'unicité de la décomposition en éléments simples impose que cette formule soit la même que la formule initiale. Une simple identification des numérateurs donne alors (entre autres, mais toutes les relations sont cohérentes) $j^2c = a$, donc $c = aj = -\dfrac{2}{3}j$, et $jd = b$, donc $d = j^2b = \dfrac{1}{3}j^2$. Finalement, $F = -\dfrac{2}{3(X-1)} + \dfrac{1}{3(X-1)^2} - \dfrac{2j}{3(X-j)} + \dfrac{j^2}{3(X-j)^2} - \dfrac{2j^2}{3(X-j^2)} + \dfrac{j}{3(X-j^2)^2}$ (puisque bien entendu j et j^2 sont conjugués l'un de l'autre).

Exercice 2 (*)

1. Supposons que $F = \dfrac{P}{Q}$ vérifie $F' = \dfrac{1}{X}$. On aurait donc $\dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2} = \dfrac{1}{X}$, ou encore $X(P'Q - PQ') = Q^2$. On peut toujours supposer que P est Q sont premiers entre eux sans perte de généralité. L'égalité précédente montre que 0 est racine de Q^2, donc de Q (mais pas de P si P et Q sont premiers entre eux). Notons α la multiplicité de 0 comme racine de Q, alors 0 est racine de Q^2 avec multiplicité 2α, de PQ' avec multiplicité $\alpha - 1$ (racine de Q' avec multiplicité $\alpha - 1$, mais pas racine de P), et de QP' avec multiplicité au moins α, donc strictement supérieure à $\alpha - 1$. On en déduit que 0 est racine de $P'Q - PQ'$ avec multiplicité exactement $\alpha - 1$ (on peut factoriser chacun des deux termes de la différence par $X^{\alpha-1}$, mais l'un des deux ne peut pas être factorisé plus alors que l'autre si, donc la différence se factorise bien par $X^{\alpha-1}$ mais pas par X^α), donc de $X(P'Q - PQ'$ avec multiplicité α. Mais ce polynôme étant censé être égal à Q^2, on doit donc avoir $\alpha = 2\alpha$, donc $\alpha = 0$, ce qui est absurde. Il existe d'autres façons de s'en sortir, par exemple en prouvant que la dérivée d'une fraction rationnelle ne peut jamais avoir un degré égal à -1.
2. Là c'est vraiment complètement trivial : $d^\circ(F^2) = 2d^\circ(F)$ ne peut pas être égal à 1.
3. Commençons par décomposer en éléments simples le second membre, ce qui est trivial puisqu'on n'a que des pôles simples : $\dfrac{X+3}{X(X-1)(X+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$. On multiplie par X puis on pose $X = 0$ pour trouver $a = \dfrac{3}{-1 \times 1} = -3$, on multiplie par $X - 1$ et on pose $X = 1$ pour trouver $b = \dfrac{4}{1 \times 2} = 2$, et on multiplie par $X + 1$ avant de poser $X = -1$ pour trouver $c = \dfrac{2}{-1 \times (-2)} = 1$. Finalement, on cherche les fractions vérifiant $F(X+1) - F(X) = \dfrac{2}{X-1} - \dfrac{3}{X} + \dfrac{1}{X+1}$. La fraction F ne peut pas avoir de pôle non réel : si $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ est pôle de F, alors $\alpha - 1$ est pôle de $F(X+1)$,

donc doit être pôle de F pour que sa partie polaire se simplifie avec celle de F et n'apparaisse pas dans la décomposition de $F(X+1)-F(X)$. Mais alors $\alpha-2$ est aussi pôle de F donc de $F(X+1)$, et une récurrence triviale prouve alors que c'est le cas pour $\alpha-n$ pour tout entier naturel n, ce qui est absurde. De même, F ne peut d'ailleurs pas admettre de pôle réel non entier. Pire, en notant α le plus petit pôle de F, on doit avoir $\alpha-1\in\{-1,0,1\}$ puisque $\alpha-1$ ne pourra pas être pôle de F pour produire une simplification. Les seuls pôles possibles pour F sont donc 0, 1 et 2. On peut encore éliminer 2, qui ne sera jamais pôle de $F(X+1)$ et ne peut donc pas produire de simplification justifiant l'absence de partie polaire correspondante dans le terme de droite. Finalement, on n'a que 0 et 1 comme pôles possibles. Le pôle 0 doit être simple, puisqu'il donnera -1 comme pôle de même multiplicité dans $F(X+1)$, et un terme en $\dfrac{a}{(X+1)^k}$ avec $k>1$ ne pourrait pas se simplifier et n'apparait pas dans le membre de gauche. On en déduit que 1 est également pôle simple de F (sinon on aurait 0 comme pôle multiple de $F(X+1)$, ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons que d'habitude). Bref, on en est réduits à $F(X)=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X-1}$, donc $F(X+1)-F(X)=\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{b-a}{X}-\dfrac{b}{X-1}$, et une identification triviale donne comme seule possiblité $a=1$ et $b=-2$, donc $F(X)=\dfrac{1}{X}-\dfrac{2}{X-1}$. Attention tout de même, on peut ajouter un polynôme constant à F en conservant des fractions solutions de notre problème.

Exercice 3 (** à ***)

- Il s'agit surtout de faire la division euclidienne pour obtenir la partie entière :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & - & 3X^2 & + & X & - & 4 & \quad X-1 \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & - & X^2) & & & & & \quad X^2-2X-1 \\
 & & - & 2X^2 & + & X & - & 4 & \\
 & & + & (2X^2 & - & 2X) & & & \\
 & & & & - & X & - & 4 & \\
 & & & & + & (X & - & 1) & \\
 & & & & & & - & 5 &
\end{array}$$

  On en déduit que $F=X^2-2X-1-\dfrac{5}{X-1}$, et il n'y a rien de plus à faire.
- Pas de partie entière à calculer, c'est toujours ça de pris. Ici, on peut faire la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ pour commencer. Les racines du dénominateur sont les racines quatrièmes de -1, donc les nombres complexes vérifiant $z^4=e^{i\pi}$. Autrement dit, on a pour racines $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pour calculer les quatre numérateurs correspondants, on a fortement intérêt à utiliser la dérivée : $\dfrac{X}{(X^4+1)'}=\dfrac{X}{4X^3}=\dfrac{1}{4X^2}$, expression qui s'évalue très facilement pour chacune de nos quatre racines : $\dfrac{1}{4z_1^2}=\dfrac{1}{4i}=-\dfrac{i}{4}=\dfrac{1}{4z_3^2}$, $\dfrac{1}{4z_2^2}=-\dfrac{1}{4i}=\dfrac{i}{4}=\dfrac{1}{4z_4^2}$. On en déduit donc que $F_2=\dfrac{i}{4}\left(\dfrac{1}{X-z_2}+\dfrac{1}{X-z_4}-\dfrac{1}{X-z_1}-\dfrac{1}{X-z_3}\right)$. Il ne reste plus qu'à repasser dans $\mathbb{R}$ en regroupant les racines conjuguées : $\dfrac{1}{X-z_4}-\dfrac{1}{X-z_1}=\dfrac{z_1-z_4}{X^2-(z_1+z_4)X+z_1z_4}=\dfrac{i\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}$. De même, $\dfrac{1}{X-z_3}-\dfrac{1}{X-z_2}=\dfrac{i\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$. Finalement, $F_2=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\dfrac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right)$.
- Celle-ci est assez classique, avec trois pôles simples égaux à -1, 0 et 1, donc une décomposition de la forme $F_3=E+\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X-1}$. On peut appliquer la méthode de la dérivation du dénominateur pour calculer immédiatement $a=\dfrac{X^5-X^4+1}{3X^2-1}(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{X^5-X^4+1}{3X^2-1}(0)=-1$ et $c=\dfrac{X^5-X^4+1}{3X^2-1}(1)=\dfrac{1}{2}$. Reste à calculer la partie entière via une banale division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & - & X^4 & & & & & & & + & 1 & \underline{X^3 - X} \\
- & (X^5 & & & - & X^3) & & & & & & & X^2 - X + 1 \\
 & & - & X^4 & + & X^3 & & & & & + & 1 & \\
 & & + & (X^4 & & & - & X^2) & & & & & \\
 & & & & & X^3 & - & X^2 & & & + & 1 & \\
 & & & & - & (X^3 & & & - & X) & & & \\
 & & & & & & - & X^2 & + & X & + & 1 &
\end{array}
$$

Notons en passant que le calcul du reste de la division n'a ici strictement aucun intérêt, et concluons : $F_3 = X^2 - X + 1 - \dfrac{1}{2(X+1)} - \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2(X-1)}$.

- Cette décomposition se fait rapidement en utilisant la technique vue dans le dernier exemple du cours, c'est-à-dire en faisant deux divisions euclidiennes successives par $X^2 + X + 2$:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr|l}
 & X^7 & & & & & & & & & & & & & + & 3 & \underline{X^2 + X + 2} \\
- & (X^7 & + & X^6 & + & 2X^5) & & & & & & & & & & & X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - X - 5 \\
 & & - & X^6 & - & 2X^5 & & & & & & & & & + & 3 & \\
 & & + & (X^6 & + & X^5 & + & 2X^4) & & & & & & & & & \\
 & & & & - & X^5 & + & 2X^4 & & & & & & & + & 3 & \\
 & & & & + & (X^5 & + & X^4 & + & 2X^3) & & & & & & & \\
 & & & & & & & 3X^4 & + & 2X^3 & & & & & + & 3 & \\
 & & & & & & - & (3X^4 & + & 3X^3 & + & 6X^2) & & & & & \\
 & & & & & & & & - & X^3 & - & 6X^2 & & & + & 3 & \\
 & & & & & & & & + & (X^3 & + & X^2 & + & 2X) & & & \\
 & & & & & & & & & & - & 5X^2 & + & 2X & + & 3 & \\
 & & & & & & & & & & + & (5X^2 & + & 5X & + & 10) & \\
 & & & & & & & & & & & & & 7X & + & 13 &
\end{array}
$$

On a donc pour l'instant $X^7 + 3 = (X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - X - 5)(X^2 + X + 1) + 7X + 13$. On effectue une deuxième division euclidienne du quotient :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & - & X^4 & - & X^3 & + & 3X^2 & - & X & - & 5 & \underline{X^2 + X + 1} \\
- & (X^5 & + & X^4 & + & 2X^3) & & & & & & & X^3 - 2X^2 - X + 8 \\
 & & - & 2X^4 & - & 3X^3 & + & 3X^2 & - & X & - & 5 & \\
 & & + & (2X^4 & + & 2X^3 & + & 4X^2) & & & & & \\
 & & & & - & X^3 & + & 7X^2 & - & X & - & 5 & \\
 & & & & + & (X^3 & + & X^2 & + & 2X) & & & \\
 & & & & & & & 8X^2 & + & X & - & 5 & \\
 & & & & & & - & (8X^2 & + & 8X & + & 16) & \\
 & & & & & & & & - & 7X & - & 21 &
\end{array}
$$

Conclusion de ce magnifique calcul : $X^7 + 3 = (X^3 - 2X^2 - X + 8)(X^2 + X + 2)^2 - (7X + 21)(X^2 + X + 2) + 7X + 13$, d'où la décomposition $F_4 = X^3 - 2X^2 - X + 8 - \dfrac{7X + 21}{X^2 + X + 2} + \dfrac{7X + 13}{(X^2 + X + 1)^2}$.

- Pas de raison de ne pas utiliser la méthode habituelle : la partie entière est nulle et on a six pôles simples qui sont les racines sixièmes de l'unité, donc 1, -1, j, j^2, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. On aura donc une décomposition de la forme $F_5 = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X-j} + \dfrac{\overline{c}}{X-j^2} + \dfrac{d}{X - e^{i\frac{\pi}{3}}} + \dfrac{\overline{d}}{X - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$. Pour le calcul des numérateurs, il vaut mieux utiliser la méthode consistant à dériver le dénominateur avant d'évaluer, donc à calculer $\dfrac{X^5 + X + 1}{6X^5}$. Pour $X = 1$, on obtient $a = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Pour $X = -1$, on aura $b = \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{1}{6}$. Pour $X = j$, curieusement, $c = \dfrac{j^5 + j + 1}{6j^5} = 0$, puisque $j^5 = j^2$ et $j^2 + j + 1 = 0$. La partie polaire correspondante (mais aussi celle de j^2) n'apparaitra donc pas dans la décomposition, ce qui ne peut se produire que dans un cas : la fraction F_5 n'était pas irréductible, et pouvait se simplifier par $(X - j)(X - j^2)$, qui sont à la fois racines du numérateur et du dénominateur (et donc en fait pas des pôles de la fraction). Reste un seul coefficient à calculer : pour $X = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $d = \dfrac{e^{i\frac{5\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}} + 1}{6e^{i\frac{5\pi}{3}}} = \dfrac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{3 - i\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3 - i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}$. Il ne reste plus qu'une étale : le regroupement des deux termes complexes conjugués : $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3(X-e^{i\frac{\pi}{3}})}+\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3(X-e^{-i\frac{\pi}{3}})}=\dfrac{X-2}{3(X^2-X+1)}$. Conclusion : $F_5=\dfrac{1}{2(X-1)}+\dfrac{1}{6(X+1)}+\dfrac{X-2}{3(X^2-X+1)}$.

- Le dénominateur de la fraction se factorise facilement sous la forme $X^2(2X-1)$, on aura donc une décomposition de la forme $F_6=E+\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{X-\frac{1}{2}}$. On calcule c très classiquement par $X-\dfrac{1}{2}$ avant de poser $X=\dfrac{1}{2}$: $c=\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-3+1}{2\times\frac{1}{4}}=-2$. Pour le pôle double, on peut poser $G=X^2F_6=\dfrac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X-1}$, donc $G'=\dfrac{(8X^3+3X^2+6X-6)(2X-1)-2(2X^4+X^3+3X^2-6X+1)}{(2X-1)^2}$, donc on déduit immédiatement $b=G(0)=-1$ et $a=G'(0)=4$. Enfin, il reste à calculer la partie entière en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, ce qu'on peut toutefois effectuer sans vraiment la poser : $2X^4+X^3+3X^2-6X+1=X(2X^3-X^2)+2X^3+3X^2-6X+1=(X+1)(2X^3-X^2)+R$, où R est un reste qui ne nous intéresse aucunement. Finalement, $F_6=X+1+\dfrac{4}{X}-\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{2}{X-\frac{1}{2}}$.
- La fraction a pour partie entière 1 (numérateur et dénominateur ont même degré et même coefficient dominant) et admet dans $\mathbb{C}$ trois pôles doubles : 1, j et j^2 (les racines cubiques de l'unité). On aura donc dans $\mathbb{C}(X)$ une décomposition de la forme $F_7=1+\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{(X-1)^2}+\dfrac{c}{X-j}+\dfrac{d}{(X-j)^2}+\dfrac{\overline{c}}{X-j^2}+\dfrac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}$. Commençons par calculer la parie polaire associée au pôle 1 : $G=(X-1)^2F=\dfrac{X^6}{(X-j)^2(X-j^2)^2}=\dfrac{X^6}{(X^2+X+1)^2}$ (puisque $(X^3-1)=(X-1)(X^2+X+1)$, donc $(X-j)(X-j^2)=X^2+X+1$, on peut d'ailleurs retrouver directement ce résultat en développant et en se rappelant que $1+j+j^2=0$). On a donc $b=G(1)=\dfrac{1}{9}$, puis $G'=\dfrac{6X^5(X^2+X+1)^2-2(2X+1)(X^2+X+1)X^6}{(X^2+X+1)^4}$, donc $a=G'(1)=\dfrac{6\times3^2-2\times3\times3}{3^4}=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$. Pour les autres pôles, on peut bien sûr procéder de la même façon (c'est un peu lourd) ou utiliser une astuce diabolique, en constatant que $F(jX)=\dfrac{j^6X^6}{(j^3X^3-1)^2}=\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}=F(X)$. Or, en reprenant la forme générale du développement et en multipliant chaque terme par j ou j^2 au numérateur et au dénominateur pour faire apparaitre des j^3 égaux à 1, $F(jX)=1+\dfrac{j^2a}{j^3X-j^2}+\dfrac{jb}{j(jX-1)^2}+\dfrac{j^2c}{j^2(jX-j)}+\dfrac{jd}{j(jX-j)^2}+\dfrac{j^2\overline{c}}{j^2(jX-j^2)}+\dfrac{j\overline{d}}{j(jX-j^2)^2}=1+\dfrac{j^2c}{X-1}+\dfrac{jd}{(X-1)^2}+\dfrac{j^2\overline{c}}{X-j}+\dfrac{j\overline{d}}{(X-j)^2}+\dfrac{j^2a}{X-j^2}+\dfrac{jb}{(X-j^2)^2}$. L'unicité de la décomposition en éléments simples permet alors d'identifier tous les numérateurs pour obtenir $j^2c=a=\dfrac{4}{9}$, donc $c=\dfrac{4}{9}j$, $jd=b=\dfrac{1}{9}$, donc $d=\dfrac{1}{9}j^2$, et quatre autres conditions qui donnent bien sûr (heureusement !) les mêmes valeurs. Conclusion : $F_7=1+\dfrac{4}{9(X-1)}+\dfrac{1}{9(X-1)^2}+\dfrac{4j}{9(X-j)}+\dfrac{j^2}{9(X-j)^2}+\dfrac{4j^2}{9(X-j^2)}+\dfrac{j}{9(X-j^2)^2}$. Il reste à regrouper les conjugués pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$: $\dfrac{4j}{9(X-j)}+\dfrac{4j^2}{9(X-j^2)}=\dfrac{4jX-4+4j^2X-4}{9(X^2+X+1)}=\dfrac{-4X-8}{9(X^2+X+1)}$, et $\dfrac{j^2}{9(X-j)^2}+\dfrac{j}{9(X-j^2)^2}=\dfrac{j^2X^2-2jX+1+jX^2-2j^2X+1}{9(X^2+X+1)^2}=\dfrac{-X^2+2X+2}{(X^2+X+1)^2}$. Attention, il reste une dernière étape car le numérateur n'est pas de degré 1, on est donc obligé de faire une petite séparation pour obtenir finalement $\dfrac{-X^2-X-1+3X+3}{9(X^2+X+1)^2}=\dfrac{-1}{X^2+X+1}+\dfrac{X+1}{3(X^2+X+1)^2}$. Après avoir tout regroupé, $F_7=1+\dfrac{4}{9(X-1)}+\dfrac{1}{9(X-1)^2}+\dfrac{-4X-9}{9(X^2+X+1)}+\dfrac{X+1}{3(X^2+X+1)^2}$.

- Aucune raison de se compliquer la vie ici, la fraction a quatre pôles simples complexes égaux à i, $-i$, $2i$ et $-2i$, donc une décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ de la forme $F_8 = \dfrac{a}{X-i} + \dfrac{\overline{a}}{X+i} + \dfrac{b}{X-2i} + \dfrac{\overline{b}}{X+2i}$. Il suffit donc de calculer les deux numérateurs de pôles simples. On multiplie tout par $X-i$ et on pose $X=i$ pour obtenir $a = \dfrac{-1-3}{2i(-1+4)} = \dfrac{2i}{3}$, puis on multiplie par $X-2i$ et on pose $X=2i$ pour obtenir $b = \dfrac{-4-3}{(-4+1)\times 4i} = -\dfrac{7i}{12}$. Conclusion : $F_8 = \dfrac{2i}{3(X-i)} - \dfrac{2i}{3(X+i)} - \dfrac{7i}{12(X-2i)} + \dfrac{7i}{12(X+2i)}$. Il ne reste plus qu'à regrouper les termes conjugués : $F_7 = -\dfrac{4}{3(X^2+1)} + \dfrac{7}{3(X^2+4)}$.
- On sait que la décomposition sera de la forme $F_9 = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX+c}{X^2+1} + \dfrac{dX+e}{(X^2+1)^2} + \dfrac{fX+g}{(X^2+1)^3}$. Commençons par le plus facile en calculant a (on multiplie par X et on pose $X=0$) : $a=3$. Ensuite, pour se débarasser de ce X gênant au dénominateur, on calcule tout simplement $F_9 - \dfrac{3}{X} = \dfrac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3} - \dfrac{3X^6+9X^4+9X^2+3}{X(X^2+1)^3} = \dfrac{X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2}{(X^2+1)^3}$ (la simplification par X en cours de calcul était obligatoire puisque 0 ne doit plus être pôle de la nouvelle fraction obtenue). On peut désormais décomposer cette fraction par la méthode « classique » des divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & - & 2X^4 & + & 2X^3 & - & X^2 & + & 2X & + & 2 & \underline{\quad X^2+1 \quad} \\
- & (X^5 & & & + & X^3) & & & & & & & X^3-2X^2+X+1 \\
 & & - & 2X^4 & + & X^3 & - & X^2 & + & 2X & + & 2 & \\
 & & + & (2X^4 & & & + & 2X^2) & & & & & \\
 & & & & & X^3 & + & X^2 & + & 2X & + & 2 & \\
 & & & & - & (X^3 & & & + & X) & & & \\
 & & & & & & & X^2 & + & X & + & 2 & \\
 & & & & & & - & (X^2 & & & + & 1) & \\
 & & & & & & & & & X & + & 1 &
\end{array}$$

On a donc $X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2 = (X^3-2X^2+X+1)(X^2+1)+X+1$. Continuons les divisions :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & - & 2X^2 & + & X & + & 1 & \underline{\quad X^2+1 \quad} \\
- & (X^3 & & & + & X) & & & X-2 \\
 & & - & 2X^2 & & & + & 1 & \\
 & & + & (2X^2 & & & + & 2) & \\
 & & & & & & & 3 &
\end{array}$$

On peut conclure : $X^5-2X^4+2X^3-X^2+2X+2 = (X-2)(X^2+1)^2 + 3(X^2+1) + X + 1$, puis $F_9 = \dfrac{3}{X} + \dfrac{X-2}{X^2+1} + \dfrac{3}{(X^2+1)^2} + \dfrac{X+1}{(X^2+1)^3}$.
- Numérateur et dénominateur de la fraction ont même degré et même coefficient dominant, donc la partie entière sera égale à 1, et on aura une décomposition de la forme $F_{10} = 1 + \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2} + \dfrac{d}{(X-1)^3} + \dfrac{e}{(X-1)^4}$. On calcule a en multipliant par X avant de poser $X=0$: $a=1$. Calculons pour simplifier $F_{10} - 1 - \dfrac{1}{X} = \dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} - \dfrac{X^5-4X^4+6X^3-4X^2+X}{X(X-1)^4} - \dfrac{X^4-4X^3+6X^2-4X+1}{X(X-1)^4} = \dfrac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4}$ (après simplification par X). Il est grand temps d'utiliser le changement de variable conseillé sur cette dernière fraction : $F_{10} - 1 - \dfrac{1}{X} = \dfrac{4(Y+1)^3-2(Y+1)^2-2(Y+1)+3}{Y^4} = \dfrac{4Y^3+12Y^2+12Y+4-2Y^2-4Y-2-2Y-2+3}{Y^4} = \dfrac{4Y^3+10Y^2+6Y+3}{Y^4} = \dfrac{4}{Y} + \dfrac{10}{Y^2} + \dfrac{6}{Y^3} + \dfrac{3}{Y^4}$. Il ne reste plus qu'à remplacer nos Y par des $X-1$ pour obtenir magiquement $F_{10} = 1 - \dfrac{1}{X} + \dfrac{4}{X-1} + \dfrac{10}{(X-1)^2} + \dfrac{6}{(X-1)^3} + \dfrac{3}{(X-1)^4}$.

Exercice 4 (**)

C'est beaucoup plus simple qu'il n'y parait : on sait que toute fraction rationnelle F peut s'écrire de façon unique sous la forme $P+G$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$ (partie entière de la fraction) et $d^\circ(G) < 0$. Il suffirait donc que l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif (fraction nulle incluse) soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$ pour qu'il constitue un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$. Et ça tombe bien puisque c'est le cas : il contient 0, et il est stable par combinaisons linéaires puisque $d^\circ(\lambda F + \mu G) \leqslant \max(d^\circ(\lambda F), d^\circ(\mu G))$ qui sera donc strictement négatif si le degré de F et celui de G sont tous les deux strictement négatifs.

Exercice 5 (**)

- En notant $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, on sait que les pôles de notre fraction sont exactement les valeurs de ω_k, pour k variant entre 0 et $n-1$ (racines n-èmes de l'unité). On peut donc écrire $\dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k}$. Pour calculer le coefficient a_k, on peut utiliser la méthode donnée en cours consistant à dériver le dénominateur de la fraction initiale : $a_k = \dfrac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n}$ puisque par définition $\omega_k^n = 1$. On peut conclure : $F_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(X - \omega_k)}$.
- Les ω_k sont toujorus pôles de la fraction, mais cette fois, on a un pôle double égal à 1 (autrement dit ω_0). Les coefficients au numérateur des parties polaires associées à ω_k pour $k \neq 0$ se calculent comme ci-dessus et sont donc égales à $\dfrac{1}{\omega_k^n - 1 + n\omega_k^n - n\omega_k^{n-1}}$ (en dérivant notre dénominateur comme un produit), ce qui se simplifie en $\dfrac{1}{n\omega_k^{n-1}(\omega_k - 1)} = \dfrac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}$. Reste à calculer la partie polaire associée au pôle double 1, qui doit être de la forme $\dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2}$. On va pour cela calculer $G = (X-1)^2 F_2 = \dfrac{X-1}{X^n - 1} = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} X^k}$ (identité remarquable classique), puis $G' = -\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1}}{(\sum_{k=0}^{n-1} X^k)^2}$. On peut alors calculer $b = G(1) = \dfrac{1}{n}$ (c'est immédiat avec la deuxième forme donnée pour G), et $a = G'(1) = -\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} k}{n^2} = \dfrac{1-n}{2n}$. Ouf, on peut conclure : $F_2 = \dfrac{1-n}{2n(X-1)} + \dfrac{1}{n(X-1)^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)(X - \omega_k)}$.
- Même méthode que pour F_1 mais cette fois-ci la dérivée du dénominateur est égale au numérateur à un facteur n près, ce qui donne des numérateurs de parties polaires tous égaux à $\dfrac{1}{n}$, donc $F_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n(X - \omega_k)}$.
- Ici, les pôles sont tous simples et déjà connus, on note a_k le numérateur de la partie polaire associée au pôle k, et on le calcul avec la méthode standard consistant à tout multiplier par $X - k$ puis à évaluer pour $X = k$: $a_k = \dfrac{n!}{k(k-1)\dots 1 \times (-1)\dots(k-n)} = \dfrac{n!}{k! \times (-1)^{n-k}(n-k)!} = (-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $F_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{X-k}$.

Exercice 6 (*)

1. Les pôles de $\dfrac{P''}{P}$ sont évidemment les racines de P, donc $\dfrac{P''}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{X - \alpha_k}$ (avec éventuellement certains coefficients β_k qui peuvent être nuls puisque α_k ne peut pas être racine de P', mais peut l'être pour P''). Pour calculer β_k, puisque tous les pôles sont simples, on applique

très simplement la formule du cours en dérivant le dénominateur : $\beta_k = \dfrac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)}$. Autrement dit, $\dfrac{P''}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)(X-\alpha_k)}$.

2. Il suffit de multiplier par X la décomposition précédente, puis de prendre la limite en $+\infty$ (le fait qu'on soit dans $\mathbb{C}$ ne change rien). Puisque P'' a un degré diminué de deux par rapport à P (ou bien est nul, mais dans ce cas il n'y a pas de question), donc $\dfrac{XP''}{P}$ a une limite nulle, or cette limite doit être égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)}$, qui est donc nul.

Exercice 7 (** à ***)

- On commence par effectuer la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{(x^2+4)(x+1)} = \dfrac{ax+b}{x^2+4} + \dfrac{c}{x+1}$. On calcule c classiquement en multipliant par $x+1$ puis en évaluant en -1 : $c = \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$. Ensuite on multiplie tout par x et on prend la limite quand x tend vers $+\infty$: $0 = a+c$ donc $a = -c = -\dfrac{1}{5}$. Enfin on évalue par exemple pour $x = 0$: $\dfrac{1}{4} = \dfrac{b}{4} + c$, donc $b = 1 - 4c = \dfrac{1}{5}$. On peut maintenant calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5(x+1)} + \frac{1-x}{5(x^2+4)}\,dx = \left[\frac{\ln(x+1)}{5} + \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{10} - \frac{\ln(x^2+4)}{10}\right]_0^1 = \dfrac{\ln(2)}{5} + \dfrac{1}{10}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{10}\ln(5) + \dfrac{1}{5}\ln(2)$. On ne va pas chercher à simplifier beaucoup plus...
- On décompose sous la forme $\dfrac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{(x-2)^2}$. On obtient directement (en multipliant par $x+1$ avant de poser $x = -1$) $a = \dfrac{-1}{(-1-2)^2} = -\dfrac{1}{9}$. De même on calcule directement (avec un produit par $(x-2)^2$) $c = \dfrac{2}{3}$. Enfin, on peut multiplier par x et calculer la limite en $+\infty$ pour obtenir la relation $0 = a+b$, donc $b = -a = \dfrac{1}{9}$. Il reste à calculer (en faisant attention au signe dans les logarithmes) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{9(x+1)} + \frac{1}{9(x-2)} + \frac{2}{3(x-2)^2}\,dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{9} + \frac{\ln(2-x)}{9} - \frac{2}{3(x-2)}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{9}\ln(2) - \dfrac{1}{9}\ln(2) + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3-2\ln(2)}{9}$.
- Celle-ci est un piège idiot, au lieu de s'embêter avec une décomposition en éléments simples, il est nettement préférable de faire le petit changement de variable $t = x+1$ pour obtenir $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^3}\,dt = \int_1^2 \frac{t^3-3t^2+3t-1}{t^3}\,dt = \int_1^2 1 - \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2} - \frac{1}{t^3}\,dt = \left[t - 3\ln(t) - \frac{3}{t} + \frac{1}{2t^2}\right]_1^2 = 1 - 3\ln(2) - \dfrac{3}{2} + 3 + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{8} - 3\ln(2)$.
- Le deuxième facteur du dénominateur se factoriser en $(x+1)(x^2-x+1)$, donc on peut décomposer l'ensemble sous la forme $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}$. On pose $G = (x+1)^2F = \dfrac{x}{x^2-x+1}$, donc $G' = \dfrac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$, pour calculer $b = G(-1) = \dfrac{-1}{1+1+1} = -\dfrac{1}{3}$, et $a = G'(-1) = \dfrac{1-1}{3^2} = 0$. C'est plutôt une bonne nouvelle, un terme en moins. Ensuite, on peut multiplier par x puis faire tendre vers $+\infty$ pour avoir la relation $0 = a+c$, donc $c = -a = 0$. Il ne va plus rester grand chose à force. Évaluons en 0 pour trouver le dernier coefficient : $0 = -\dfrac{1}{3}+d$, donc $d = \dfrac{1}{3}$. Finalement, $I_4 = \displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{1}{3(x^2-x+1)}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{1}{3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3} +$

$\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{6}$.

Exercice 8 (***)

1. Les formules de dérivations de produit prouvent que $P' = \frac{P}{X-a_1} + \dots + \frac{P}{X-a_n}$, donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-a_i} = \frac{P'}{P}$. On peut redériver cette formule pour obtenir directement $\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{(X-a_i)^2} = \frac{P''P - P'^2}{P^2}$, donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X-a_i)^2} = \frac{P'^2 - PP''}{P^2}$. Mais on peut aussi reprendre le calcul initial en dérivant deux fois au lieu d'une seule : $P'' = \frac{P}{(X-a_1)(X-a_2)} + \dots + \frac{P}{(X-a_{n-1})(X-a_n)}$ (attention tout de même, chaque facteur apparait en fait deux fois dans la somme, une fois en ayant dérivé d'abord le terme numéro i puis le terme numéro j, une deuxième fois en ayant dérivé le facteur j puis le facteur i, ce qui correspond de toute façon à la somme qu'on demande de calculer où les termes apparaissent aussi deux fois), donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \frac{1}{(X-a_i)(X-a_j)} = \frac{P''}{P}$.
2. Supposons donc $P'(z) = 0$ mais $P(z) \neq 0$ et appliquons la première formule obtenue à la question précédente à z : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-a_i} = 0$. On peut conjuguer tout le calcul pour obtenir de même $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{z}-\overline{a_i}} = 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \frac{z-a_i}{|z-a_i|^2} = 0$. Autrement dit, en posant $\mu_i = \frac{1}{|z-a_i|^2}$, on a $\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$. Il ne reste plus qu'à poser $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$ pour obtenir le résultat souhaité, les propriétés demandées étant évidentes (λ_i est une somme de réels tous positifs, donc certainement un réel positif, et la somme des λ_i vaut 1 par construction).

   Interprétation géométrique : si P est un polynôme à racines simples, toutes les racines de son polynôme dérivé P' peuvent être obtenues comme combinaisons linéaires à coefficients réels positifs des racines de P, ce qui revient à dire que ces racines sont situées à l'intérieur de l'enveloppe convexe des racines $a_1, \dots, a_n$ (plus grand polygône dont les sommets sont tous des racines de P). En fait, on a prouvé que les racines de P' sont barycentres à coefficients positifs de celles de P.

Exercice 9 (***)

Essayons de calculer l'intégrale demandée en écrivant explicitement $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on peut alors écrire $I = \int_0^1 (P(t))^2\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) P(t)\, dt = a_0 \int_0^1 P(t)\, dt$ en exploitant l'hypothèse de l'énoncé (on développe brutalement par linéarité, tous les autres termes s'annulent). Mais on peut écrire également plus explicitement cette hypothèse : $\int_0^1 t^k P(t)\, dt = \sum_{j=0}^{n} \int_0^1 a_j t^{k+j}\, dt = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{k+j+1} = 0$. Introduisons donc la fraction $F = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{X+j+1}$. Si on met tout au même dénominateur pour obtenir la forme $F = \frac{Q}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)}$, le polynôme Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n (pas de partie entière) et s'annulant pour $X = 1$, $X = 2$, …, $X = n$. Autrement dit, $Q = \alpha(X-1)(X-2)\dots(X-n)$. Or, en revenant à la définition du polynôme P, on peut écrire $\int_0^1 P(t)\, dt = \left[a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2} + \dots + \frac{a_n t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1}$. Cette valeur correspond exactement à $F(0)$ (sous forme « développée ») qui vaut d'après les calculs précédents $\frac{\alpha\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-n)}{1\times 2\times\cdots\times(n+1)} = (-1)^n \dfrac{\alpha}{n+1}$. On a donc $I = a_0(-1)^n \dfrac{\alpha}{n+1}$. Reste à calculer la valeur de a_0 : il correspond au numérateur de la partie polaire de F associée au pôle -1, donc égal à $\dfrac{Q(-1)}{(-1+2)(-1+3)\dots(-1+n+1)} = \dfrac{\alpha(-2)(-3)\dots(-n-1)}{n!} = (-1)^n\alpha(n+1)$. Finalement, $I = \alpha^2 = (n+1)^2 \left(\int_0^1 P(t)\ dt\right)^2$.