

# Feuille d'exercices n° 22 : Fractions rationnelles.

MPSI Lycée Camille Jullian

15 avril 2022

## Exercice 1 (\*\*)

Calculer la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  des fractions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \bullet \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} & \bullet \frac{3X - 1}{X^2(X + 1)^2} & \bullet \frac{1}{X^2 + X + 1} \\ \bullet \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} & \bullet \frac{2}{X(X - 1)^2} & \bullet \frac{3}{(X^3 - 1)^2} \end{array}$$

## Exercice 2 (\*)

1. Montrer que  $F = \frac{1}{X}$  n'a pas de primitive dans  $\mathbb{C}(X)$  (une primitive étant bien sûr définie comme une fraction rationnelle ayant pour dérivée la fonction étudiée).
2. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle  $F$  telle que  $F^2 = X$ .
3. Déterminer toutes les fractions rationnelles  $F$  vérifiant  $F(X + 1) - F(X) = \frac{X + 3}{X(X - 1)(X + 1)}$ .

## Exercice 3 (\*\* à \*\*\*)

Calculer la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  des fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{l} \bullet F_1 = \frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1} \\ \bullet F_2 = \frac{X}{X^4 + 1} \\ \bullet F_3 = \frac{X^5 - X^4 + 1}{X^3 - X} \\ \bullet F_4 = \frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^2} \\ \bullet F_5 = \frac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1} \\ \bullet F_6 = \frac{2X^4 + X^3 + 3X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2} \\ \bullet F_7 = \frac{X^6}{(X^3 - 1)^2} \\ \bullet F_8 = \frac{X^2 - 3}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)} \\ \bullet F_9 = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 11X^2 + 2X + 3}{X(X^2 + 1)^3} \\ \bullet F_{10} = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4} \text{ (on pourra poser en cours de route } X = Y + 1 \text{ pour simplifier le calcul)} \end{array}$$

## Exercice 4 (\*\*)

Déterminer un supplémentaire de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathbb{K}(X)$ .

## Exercice 5 (\*\*)

Calculer dans  $\mathbb{C}(X)$  les décompositions en éléments simples des fractions suivantes ( $n$  est toujours un entier naturel  $\geq 1$ ) :

- $F_1 = \frac{1}{X^n - 1}$
- $F_2 = \frac{1}{(X-1)(X^n - 1)}$
- $F_3 = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$
- $F_4 = \frac{n!}{X(X-1)(X-2)\dots(X-n)}$

## Exercice 6 (\*)

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme scindé à racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

1. Écrire la décomposition en éléments simples de  $F = \frac{P''}{P}$ .
2. En déduire que  $\sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0$

## Exercice 7 (\*\* à \*\*\*)

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$
- $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)(x - 2)^2} dx$
- $I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{(x + 1)^3} dx$
- $I_4 = \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)(x^3 + 1)} dx$

## Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme à racines simples  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

1. Exprimer à l'aide de  $P'$  et éventuellement de  $P''$  les sommes  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{X - a_i}$ ,  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2}$ ,

$$\text{et } \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{(X - a_i)(X - a_j)}.$$

2. Montrer que, si  $z$  est racine de  $P'$  mais  $P(z) \neq 0$ , alors  $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ , où les coefficients  $\lambda_i$  sont des réels positifs ou nuls tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Interpréter géométriquement le résultat.

## Exercice 9 (\*\*\*)

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  tel que  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\int_0^1 t^k P(t) dt = 0$ .

Montrer que  $\int_0^1 (P(t))^2 dt = (n+1)^2 \left( \int_0^1 P(t) dt \right)^2$ .