Feuille d'exercices n° 17 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 mars 2022

Exercice 1 (*)

Commençons déjà par constater que la fonction nulle vérifie toutes les conditions de l'exercice, il nous restera donc à regarder si chaque ensemble est stable ou non par combinaisons linéaires (on peut bien évidemment séparer la somme et le produit par un réel si on le souhaite).

- Soient f et g deux fonctions paires, on peut certainement écrire $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est donc également paire, et l'ensemble des fonctions paires est un espace vectoriel.
- Les fonctions admettant un minimuml global ne forment pas un sous-espace vectoriel : l'ensemble n'est pas stable par produit par un réel négatif (si f admet un minimum global, $-f$ admettra un maximum global, mais n'a aucune raison d'avoir un minimum). On peut par contre prouver qu'une somme de deux telles fonctions admet nécessairement un minimum global (mais ce n'est pas une preuve évidente).
- Les fonctions s'annulant une infinité de fois ne forment pas un sous-espace vectoriel : l'ensemble est stable par un produit par un réel (les valeurs d'annulation de f annulant aussi λf), mais pas par somme : une fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ mais strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ (on peut construire une telle fonction $\mathcal{C}^\infty$, ajoutée à une fonction positive sur $\mathbb{R}^-$ mais nulle sur $\mathbb{R}^+$ ne s'annulera jamais ailleurs qu'en 0, donc sûrement pas une infinité de fois.
- Les fonctions vérifiant $f(2x) = f(x^2)$ forment un sous-espace vectoriel : si f et g vérifient l'équation, alors $(\lambda f + \mu g)(2x) = \lambda f(2x) + \mu g(2x) = \lambda f(x^2) + \mu g(x^2) = \lambda f + \mu g)(x^2)$.
- Les fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$ forment un sous-espace vectoriel à cause de la linéarité de la dérivation : si $f'(5) = g'(5) = 0$, alors $(\lambda f + \mu g)'(5) = \lambda f'(5) + \mu g'(5) = 0$.
- Les fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$ (ou toute autre équation différentielle linéaire homogène) forment un sous-espace vectoriel, encore une fois à cause de la linéarité de la dérivation (et de la dérivation seconde) : si f et g sont solutions de l'équation, alors $(\lambda f + \mu g)''(x) = \lambda f''(x) + \mu g''(x) = \lambda(3f'(x) - 2f(x)) + \mu(3g'(x) - 2g(x)) = 3(\lambda f + \mu g)'(x) - 2(\lambda f + \mu g)(x)$, donc toute combinaison linéaire de f et g est également solution de l'équation.
- L'énoncé faisait intervenir le terme « branche parabolique » que vous ne connaissez pas, faisons semblant de ne pas l'avoir vu. Avec une simple asymptote, l'ensemble est un espace vectoriel : si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - cx - d) = 0$ (les deux réels a et c ayant le droit d'être nuls pour intégrer le cas des aymptotes horizontales), alors $\underset{x \to +\infty}{(} \lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda a + \mu c)x - \lambda b - \mu d) = 0$, donc $\lambda f + \mu g$ admet une asymptote également.

Exercice 2 (*)

Commençons par constater qu'à l'exception du deuxième sous-ensemble, le polynôme nul vérifie toutes les conditions données. On notera F l'ensemble étudié dans chacun des cas.

1. $F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$ est stable par somme et produit par un réel, c'est un sous-espace vectoriel. Les polynômes $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ vérifiant $P(2) = 0$ vérifient simplement

l'équation $a+2b+4c+8d=0$, soit $a=-2b-4c-8d$, ou encore $P=-2b-4c-8d+bX+cX^2+dX^3$. Autrement dit, $F=\text{Vect}(X-2,X^2-4,X^3-8)$. La famille $(X-2,X^2-4,X^3-8)$ étant libre (les polynômes sont tous de degré distincts) c'est une base de F qui est donc de dimension 3.

2. ici, F n'est pas un sous-espace vectoriel pour la raison évoquée plus haut.
3. F est un sous-espace vectoriel à cause de la linéarité de la dérivation seconde : si $P+P''=0$ et $Q+Q''=0$, alors $\lambda P+Q+(\lambda P+Q)''=\lambda(P+P'')+Q+Q''=0$. En fait, ce sous-espace vectoriel est réduit au polynôme nul pusique $P''=-P$ implique que P'' est de même degré que P, ce qui n'arrive jamais pour un polynôme non nul. F est donc de dimension 0 (si on tient à en donner une base, il faut donner une famille vide, la famille réduite au vecteur nul n'étant déjà plus libre).
4. ici, il est évident que F est un sous-espace vectoriel puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est un espace vectoriel. Par ailleurs, on sait déjà qu'il est de dimension 2 et admet pour base $(1,X)$.
5. comme pour le premier sous-ensemble, les conditions sont clairement laissées stables par combinaison linéaire, il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel. Utilisons une méthode différente pour déterminer une base. On sait que les polynômes constituant F admettent 1, 2 et 3 comme racines, donc peuvent se factoriser sous la forme $P=(X-1)(X-2)(X-3)Q$, où Q est un polynôme qui ne peut être que constant puisque P est de degré 3 ! Autrement dit, $F=\text{Vect}(X^3-6X^2+11X-6)$, et F est de dimension 1.
6. F est un sous-espace vectoriel à cause de la linéarité de l'intégration : $\displaystyle\int_0^2 \lambda P(x)+Q(x)\,dx = \lambda\int_0^2 P(x)\,dx+\int_0^2 Q(x)\,dx=0$ en supposant P et Q appartenant à F. Un polynôme $P=a+bX+cX^2+dX^3$ appartient à F si $2a+2b+\frac{8}{3}c+4d=0$ (on calcule simplement l'intégrale de P, ce qui ne devrait pas poser de grosse difficulté), soit $c=-\frac{3}{2}d-\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}b$. Autrement dit, $P=a+bX-\frac{1}{4}(6d+3a+3b)X^2+dX^3$, ou encore $F=\text{Vect}(3X^2-4,3X^2-4X,2X^3-3X^2)$ (j'ai multiplié les deux premiers polynômes par -4 et le dernier par 2, ça ne change certainement rien à l'espace vectoriel engendré). F est en particulier de dimension 3 (la famille étant bel et bien libre).
7. C'est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, donc un sous-espace vectoriel. Pour en déterminer une base, le plus simple est de repartir de la forme obtenue ci-dessus, et de rajouter la condition $P(1)=0$, soit $a+b-\frac{3}{2}d-\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}b+d=0$, ou encore $\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}d=0$. On obtient plus simplement $b=2d-a$, ce qui donne $P=a+(2d-a)X-3dX^2+dX^3$, et $F=\text{Vect}(1-X,2X-3X^2+X^3)$, qui est donc de dimension 2.
8. F est à nouveau un sous-espace vectoriel de façon essentiellement évidente, chacune des deux annulations étant clairement laissée stable par combinaisons linéaires. Si $P=a+bX+cX^2+dX^3$, on trouve les deux équations $a+b+c+d=0$ et $b+2c+3d=0$, soit $b=-2c-3d$ puis $a=-b-c-d=c+2d$, donc $P=c+2d-(2c+3d)X+cX^2+dX^3$ et $F=\text{Vect}(1-2X+X^2,2-3X+X^3)$. Alternativement, on peut dire que les polynômes de P admettent 1 pour racine double et s'écrivent donc sous la forme $P=(X-1)^2(aX+b)$, ce qui donne $F=\text{Vect}(X^2-2X+1,X^3-2X^2+X)$. Dans les deux cas, on constate que F est de dimension 2.
9. un dernier sous-espace vectoriel pour la route, puisque $(\lambda P+Q)(2X+1)=\lambda P(2X+1)+Q(2X+1)$, ce qui prouve facilement la stibilité de la condition imposée par combinaison linéaire. Pas besoin de se fatiguer à faire des calculs, le polynôme $2P(X)$ aun coefficient dominant qui est le double de celui de P, alors que $P(X+1)$ a le même coefficient dominant. Seul le polynôme nul appartient donc à F, qui est de dimension 0.

Exercice 3 (**)

1. Pour vérifier si la famille est libre, supposons que $a(-1,1,1)+b(1,-1,1)+c(1,1,-1) = (0,0,0)$. On peut traduire cette égalité par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. La somme des deux premières lignes donne $2c = 0$, soit $c = 0$. De même, la somme des extrêmes donne $b = 0$ et la somme des deux dernières $a = 0$. La seule combinaison linéaire de la famille donnant le vecteur nul est donc la combinaison nulle, la famille est libre. Pour prouver que la famille est génératrice, calculons directement les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans la famille, ce qui nous permettra de répondre très rapidement à la question suivante. Essayons donc d'écrire un vecteur (x,y,z) sous la forme $a(-1,1,1)+b(1,-1,1)+c(1,1,-1)$. Il suffit juste de changer le second membre du système précédent : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & x \\ a & - & b & + & c & = & y \\ a & + & b & - & c & = & z \end{array}\right.$.
   La somme des deux premières lignes donne cette fois $2c = x+y$, soit $c = \dfrac{x+y}{2}$. De même, les autres sommes donnent $b = \dfrac{x+z}{2}$ et $a = \dfrac{y+z}{2}$. Le système ayant toujours une solution, la famille est génératrice, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées du vecteur $(2,3,4)$ dans cette base sont obtenus en remplaçant x, y et z par 3, 4 et 5 dans les calculs précédents, ce qui donne $a = \dfrac{9}{2}$; $b = 4$ et $c = \dfrac{7}{2}$. Autrement dit, les coordonnées dans cette base sont $\left(\dfrac{9}{2}, 4, \dfrac{7}{2}\right)$.

2. La famille étant échelonnée (une constante, un polynôme de degré 1, un de degré 2 et un de degré 3), le cours nous assure directement qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Cherchons les coordonnées de X^3, autrement dit cherchons quatre réels a, b, c et d tels que $X^3 = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$. En développant tout, $X^3 = a + bX + cX^2 - cX + dX^3 - 3dX^2 + 2dX = dX^3 + (c-3d)X^2 + (2d-c+b)X + a$. Par identification des coefficients, $d = 1$, $c - 3d = 0$, donc $c = 3$; $2d - c + b = 0$, donc $b = 1$ et $a = 0$. Les coordonnées de X^3 dans notre base sont donc $(0,1,3,1)$ (si vous préférez, $X^2 = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)$).

3. Si $a\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en isolant chaque coefficient, on trouve le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & 2c & & & = & 0 \\ a & + & 2b & - & 2c & - & 2d & = & 0 \\ & & 3b & + & c & - & 10d & = & 0 \\ & & -b & - & c & + & 4d & = & 0 \end{array}\right.$. Procédons par un mélange de combinaisons et de substitutions : $a = -2c$, la deuxième équation devient alors en divisant par 2, $b - 2c - d = 0$. En additionnant avec la dernière équation, $-3c + 3d = 0$, soit $d = c$. On trouve alors dans la deuxième équation $b - 3c = 0$, soit $b = 3c$. Reste à tout remplacer dans la troisième équation : $9c + c - 10d = 0$. Ah mince, cette équation est toujours vérifiée ! En effet, une solution non triviale du système est par exemple $(-2,3,1,1)$. La famille n'étant pas libre, ce n'est bien sûr pas une base.

4. La famille la plus simple à prendre est la suivante : on définit quatre suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) en posant $a_0 = 1$, $b_1 = 1$, $c_2 = 1$, $d_3 = 1$ et tous les autres termes de chaque suite sont nuls. Chacune de ces suites appartient évidemment à E, et on peut prouver directement que la famille est une base en prouvant qu'une suite de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de nos quatre suites : en effet, on peut écrire $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n + u_2 c_n + u_3 d_n$ (on vérifie trivialement que cette suite coïncide avec (u_n) en constatant que les quatre premiers termes sont les mêmes et que les suivants sont nuls), et cette écriture est unique en regardant les quatre premiers coefficients. Dans cette base, les coordonnées de x sont tout simplement $(-2,3,4,1)$.

Exercice 4 (*)

L'ensemble F est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène, il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on peut écrire G sous la forme $\{a(2,1,3) + b(1,-1,-1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((2,1,3),(1,-1,-1))$, qui est aussi un sous-espace vectoriel. Leur intersection est constituée des vecteurs de la forme $(2a+b, a-b, 3a-b)$ vérifiant $2x+y-3z=0$, soit $2(2a+b)+(a-b)-3(3a-b)=0$, soit $-4a+4b=0$. Autrement dit, on doit avoir $a=b$ et $F \cap G = \{(3a,0,2a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((3,0,2))$.

Exercice 5 (*)

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I,J,K,L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour prouver que la famille (I,J,K,L) en est une base, il suffit donc de prouver que la famille est libre, ce qui est essentiellement trivial (si on écrit qu'une combinsaison linéaire de la famille est nulle, on obtient 16 équations donc quatre à chaque fois nous assurent la nullité de chaque coefficient).
2. On calcule sans difficulté $J^2 = L$, $K^2 = L$, $L^2 = L$, $J^3 = K$, $K^3 = J$ et $L^3 = L$.
3. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ = I$, puis $KL = LK = K^3 = J$ et $JL = LJ = J^3 = K$.
4. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI+bJ+cK+dL$ et $eI+fJ+hK+iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae+bh+cf+di)I+(af+be+ci+dh)J+(ag+bi+ce+df)K+(ai+bf+cg+de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel et stabilité par produit interne).

Exercice 6 (**)

- Les deux sous-ensembles sont définis par des équations linéaires homogènes, ce sont des sous-espaces vectoriels. Leur intersection est constituée des couples (x,y) vérifiant $x+y=x-y=0$, ce qui donne très facilement $x=y=0$. On a donc bien $F \cap G = \{0\}$. De plus, tout vecteur (a,b) peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : $(a,b) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ (si on ne le devine pas, on résout un gentil système). On peut également constater sans difficulté que F et G sont chacun de dimension 1.
- F est défini comme ensemble de solutions d'une équation linéaire homogène, G est l'espace vectoriel engendré par une famille, il s'agit bien de deux sous-espaces vectoriels. Supposons $u \in F \cap G$, alors $u = (3a, 2a, a)$, avec $3a - 2a + a = 0$, donc $a = 0$. L'intersection est bien réduite au vecteur nul. Soit désormais un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on souhaite écrire $(x,y,z) = (a,b,c) + (3d, 2d, d)$, avec $a-b+c=0$. On trouve donc les conditions $a+3d=x$, soit $a = x-3d$; $b+2d=y$, soit $b=y-2d$, et de même $c=z-d$. La condition $a-b+c=0$ donne alors $x-3d-y+2d+z-d=0$, donc $d = \frac{x-y+z}{2}$. On en déduit les valeurs (uniques) de a, b et c, le système a une solution, ce qui prouve que $F+G=\mathbb{R}^3$. Autre possiblité, constater que $\dim(G)=1$ et $\dim(F)=2$ (on résout aisément le système définissant F).
- F est évidemment un sous-espace vectoriel, G aussi puisqu'il s'agit du noyau d'une application linéaire (la dérivation). Les seuls polynômes ayant une dérivée nulle étant les constantes, $F \cap G = \{0\}$ (aucune constante n'est combinaison linéaire de X et de X^2. Par ailleurs, on peut évidemment écrire tout polynôme de degré 2 comme combinaison linéaire de X et de X^2 plus une constante, c'est la définition d'un polynôme ! Cela prouve la supplémentarité.
- Les sous-espaces F et G sont en effet des sous-espaces vectoriels, une somme ou un produit par un réel de fonctions paires est paire, et de même pour les fonctions impaires. Leur intersection

est réduite à la fonction nulle, puisque la seule fonction à la fois paire et impaire (sans même parler de polynômes) est la fonction nulle (elle vérifie $f(x) = -f(x)$ pour tout réel). Par ailleurs, on peut facilement écrire tout polynôme de E comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, tout simplement en séparant les termes correspondant aux puissances paires et impaires : si $P = aX^6 + bX^5 + cX^4 + dX^3 + eX^2 + fX + g$, alors $P = Q + R$, avec $Q = aX^6 + cX^4 + eX^2 + g$ qui est pair, et $R = bX^5 + dX^3 + fX$ qui est impair. On peut en fait montrer à partir de ceci que $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4, X^6)$ et $G = \text{Vect}(X, X^3, X^5)$ (et constater qu'ils sont de dimension respective 4 et 3).

- Le sous-ensemble G coïncide avec $\mathbb{R}_0[X]$, c'est un sous-espace vectoriel de E ; les fonctions d'intégrale nulle constituent également un sous-espace vectoriel de E à cause de la linéarité de l'intégrale. Si une fonction appartient à $F \cap G$, elle est constante égale à k, avec $\int_{-1}^{1} k\, dt = 0$, soit $2k = 0$. Seule la fonction nulle convient. Enfin, on peut écrire n'importe quelle fonction continue f sous la forme $f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt + \left(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt\right)$. Le morceau de gauche est évidemment une constante k, celui de droite, si on le nomme $g(x)$, vérifie $\int_{-1}^{1} g(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(t) - k\, dt = 2k - 2k = 0$. Autrement dit, $g \in G$, et $f \in F + G$, ce qui prouve la supplémentarité de F et G dans E (attention, ici, on ne peut sûrement pas utiliser d'argument de dimension car E n'est pas un espace vectoriel de dimension finie).
- Chacun des ensembles F et G est un sous-espace vectoriel de E à cause de la linéarité des équations (vérification triviale). Attention tout de même, l'énoncé a un petit peu oublié de préciser que les suites de F et de G devaient aussi appartenir à E, sinon l'exercice n'a plus aucun sens ! Soit donc une suite appartenant à F et G. Elle vérifie $u_{n+1} = -u_n$, donc $u_{n+2} = -u_{n+1} = u_n$, ce qui implique en prenant la définition de G que $u_n + 2u_n + u_n = 0$, donc $u_n = 0$. La suite est donc nulle. Considérons désormais une suite quelconque (u_n) de E, et posons $v_n = u_{n+1} + u_n$. La suite (v_n) vérifie $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = u_{n+3} + u_{n+2} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_{n+1} + u_n = 0$ puisque $(u_n) \in E$. La suite (v_n) appartient donc à G. De même, la suite $(u_n + u_{n-1})$ appartient à G (il suffit de décaler les relations). Puisque G est un sous-espace vectoriel, la suite définie par $w_n = u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1}$ appartient aussi à G. Posons maintenant $z_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$, alors $z_{n+1} + z_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n + u_{n-1} = 0$ puisque $(u_n) \in E$. La suite (z_n) appartient donc à F. Il suffit alors de constater que $u_n = \frac{1}{4}w_n - \frac{1}{4}z_n$, avec $\frac{1}{4}w_n \in G$ et $-\frac{1}{4}z_n \in F$. Nous avons bien achevé la preuve du fait que $E = F \oplus G$ (ici, tous les espaces sont de dimension finie mais c'est loin d'être évident !).

Exercice 7 (**)

1. Comme on est un peu paresseux et qu'on n'a pas envie de résoudre un système, on se contente de constater que $2\times(1, 2, 0, 1) + (2, 1, 3, -1) = (4, 5, 3, 1)$, donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, -1))$. Les deux vecteurs restants n'étant certainement pas proportionnels, $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = 2$, et on vient d'exhiber une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. On peut écrire $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{(a + 2b, 2a + b, 3b, a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Il suffit de trouver deux équations reliant les quatre coordonnées pour décrire le sous-espace qu'on sait déjà être de dimension 2. Par exemple, en notant (x, y, z, t) les quatre coordonnées, $y - x = 2a + b - a - 2b = a - b = t$, et $x + y = 3a + 3b = 3(a - b) + 6b = 3t + 2z$. Il y a évidemment énormément d'autres possibilités, mais le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & 2z & - & 3t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & t & = & 0 \end{array}\right.$ en est une.
3. Il suffit de « résoudre » le système : $t = x + z$, puis $y = -2x - z - t = -3x - 2z$, donc $G = \{(x, -3x - 2z, z, x + z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -3, 0, 1); (0, -2, 1, 1))$. Manifestement, $\dim(G) = 2$.

4. Puisque les deux sous-espaces sont de dimension 2, la somme des dimensions vaut 4, il suffit par exemple de prouver que $F \cap G = \{0\}$ pour prouver la supplémentarité. On peut par exemple choisir $u = (a+2b, 2a+b, 3b, a-b) \in F$ et imposer que $u \in G$, ce qui donne les deux équations $2(a+2b)+2a+b+3b+a-b=0$ et $a+2b+3b-a+b=0$, soit $5a+7b=6b=0$, qui n'a manifestement comme unique solution que $a=b=0$, donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G = \mathbb{R}^4$. Pour la décomposition du vecteur, il faut écrire $(6,10,8,2) = (a+2b+x, 2a+b-3x-2z, 3b+z, a-b+x+z)$, soit $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & 2b & + & x & & & = & 6 \\ 2a & + & b & - & 3x & - & 2z & = & 10 \\ & & 3b & & & + & z & = & 8 \\ a & - & b & + & x & + & z & = & 2 \end{array}\right.$. On sait déjà quelles combinaisons effectuer : en écrivant $2L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, il reste $5a+7b=32$, et en faisant $L_1 + L_3 - L_4$, on trouve $6b = 12$, ce qui donne $b=2$ puis $a = \dfrac{18}{5}$. Pour éliminer les a et les b, on a aussi des combinaisons toutes prêtes : $L_1 + L_2 - 2L_3 - 3L_4$ donne $-5x - 7z = -6$; et $L_1 - L_2 + L_4$ donne $5x + 3z = -2$. La somme de ces deux conditions nous donne maintenant $-4z = -8$ soit $z = 2$, puis $x = -\dfrac{8}{5}$. Reste à calculer $(a+2b, 2a+b, 3b, a-b) = (7.6, 9.2, 6, 1.6) = x_F \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, et $(x, -3x-2z, z, x+z) = (-1.6, 0.8, 2, 0.4) = x_G \in G$. La somme de ces deux vecteurs est égale à $(6,10,8,2)$, ce qui répond à la question posée.

Exercice 8 (*)

1. On résout le système pour obtenir (en additionnant les deux équations) $3x + 3z = 2$, donc $z = \dfrac{2}{3} - x$, puis en reportant dans la première équation initiale $y = x + z + 1 = \dfrac{5}{3}$. Autrement dit, $F = \left\{\left(x, \dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3} - x\right)\right\} = \left(0, \dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right) + \text{Vect}((1,0,-1))$ qui est bien un sous-espace affine, dirigé par le vecteur $(1,0,-1)$ (c'est donc une droite affine dans l'espace).
2. On ne va pas s'embêter ici à écrire un système qui serait très lourd. Fixons une matrice A quelconque appartenant à F, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $M \in F \Leftrightarrow \text{Tr}(M) = \text{Tr}(A)$, ce qui par linéarité de la trace implique que $\text{Tr}(M - A) = 0$, donc M peut s'écrire sous la forme $A + B$, avec $\text{Tr}(B) = 0$. On reconnait ici un sous-espace affine dirigé par l'hyperplan constitué de toutes les matrices de trace nulle.
3. Là, impossible d'écrire un système puisqu'on est dans un espace vectoriel de dimension infinie. L'astuce consiste alors à faire comme on a fait pour l'exemple précédent et à se ramer à un sous-espace vectoriel en « transformant les constantes en 0 ». Notons donc f_0 une fonction vérifiant $f_0(0) = 2$ et $f_0(1) = 3$ (par exemple on pose $f_0(x) = x + 2$, mais n'importe quelle fonction même pas continue peut aussi faire l'affaire), alors $f \in F \Leftrightarrow (f - f_0)(0) = (f - f_0)(1) = 0$. Or, l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0 et en 1 est un sev de E (c'est stable par somme et produit pas une constante de façon évidente), donc F est bien un sea dirigé par ce sous-espace vectoriel.
4. Ne nous embêtons surtout pas à résoudre quoi que ce soit : le cours nous assure que les solutions d'une telle équation différentielles sont de la forme $y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière fixée, et y_h parcourt l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène associée (E_h) : $e^{x^2} f' + f = 0$. Mais cette description est exactement celle d'un sous-espace affine dirigé par le sev constitué des solutions de (E_h) (les solutions d'une équation différentielle homogène forment toujours un sous-espace vectoriel, la stabilité par somme et produit par une constante sont évidentes dans ce cas).

Exercice 9 (*)

1. En notant a, b, c et d les quatre coefficients d'une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'appartenance de la matrice à notre premier ensemble est équivalente aux quatre conditions $a + 2c = b + 2d = -2a - 4c = -4b - 4d = 0$. On se rend immédiatement compte que les deux dernières équations sont les mêmes que les deux premières à un facteur -2 près, ce qui mène à une résolution facile : $a = -2c$ et $b = -2d$. Autrement dit, on trouve $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. On constate que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On peut en donner facilement une base : $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
2. Le principe est le même, mais les équations sont cette fois-ci $a + 2c = a - 2b$, $b + 2d = 2a - 4b$, $-2a - 4c = c - 2d$ et $-2b - 4d = 2c - 4d$. La première équation donne $c = -b$, la dernière est alors automatiquement vérifiée. Les deux autres peuvent maintenant s'écrire $5b + 2d - 2a = -2a + 5b + 2d = 0$. Mais oui, ce sont encore les mêmes ! On impose donc $a = d + \dfrac{5}{2}b$ pour obtenir des matrices de la forme $\begin{pmatrix} d + \frac{5}{2}b & b \\ -b & d \end{pmatrix}$, soit encore un sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est $\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 \right)$.

Exercice 10 (***)

1. L'existence de chacun des deux supplémentaires, c'est du cours. En appliquant la formule de Grassmann, on peut par ailleurs écrire $\dim(F \cap G) + \dim(F') = \dim(F)$, donc $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. De même, $\dim(G') = \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Comme $\dim(F) = \dim(G)$ par hypothèse, on a bien en effet $\dim(F') = \dim(G')$.
2. Si $x \in F' \cap G'$, en particulier $x \in F \cap G$, puisque $F' \subset F$ et $G' \subset G$. Mais l'intersection de F' et $F \cap G$ est réduite au vecteur nul, puisqu'ils sont supplémentaires dans F, donc $x = 0$.
3. Commençons par constater, en notant $p = \dim(F) = \dim(G)$, que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = p + p - (p - k) = p + k$. Un supplémentaire de F (ou de G) dans $F + G$ devrait donc avoir pour dimension $p + k - p = k$, la même que celle de F' ou de G'. Notons $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ une base de F', et $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ une base de G' (elles ont le même nombre d'éléments puisque les deux espaces sont de même dimension), et notons $\mathcal{B} = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_k + g_k)$. Cette famille est certainement constituée de vecteurs de $F + G$, et elle est libre car si on suppose $\lambda_1(f_1 + g_1) + \cdots + \lambda_k(f_k + g_k) = 0$, alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = -(\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k)$. D'après la question précédente, chacun des deux membres est alors nul (celui de gauche est dans F', celui de droite dans G'), ce qui implique la nullité de chaque coefficient puisque la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre comme base de F'. Il suffit désormais de prouver que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ a une intersection nulle avec F et avec G pour qu'il en soit supplémentaire, puisqu'il est de la bonne dimension k. Prouvons par exemple que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \cap F = 0$. Soit donc $x = \lambda_1(f_1 + g_1) + \cdots + \lambda_k(f_k + g_k)$ et supposons que $x \in F$. Alors $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots \lambda_k g_k = x - (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k) \in F$ puisque tout ce qui est dans le membre de droite appartient à F. Mais le membre de gauche, lui, appartient à G', donc à G. Le membre de droite est alors dans $F \cap G$, qui est supplémentaire de G' dans G. Chacun des deux deux membres est alors nécessairement nul, ce qui assure la nullité de tous les coefficients, donc de x. Les espaces $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ et F ont dont pour dimensions respective p et k, ont une intersection nulle, ils sont supplémentaires dans $F+G$ qui est de dimension $p+k$. On démontre exactement de la même façon que $G \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F + G$.
4. On considère la base $\mathcal{B}$ précédente, on la complète en une base $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, h_1, h_2, \dots, h_p)$ de $F + G$, puis on complète encore en une base $(f_1 + g_1, \dots, f_k + g_k, h_1, h_2, \dots, h_p, e_1, \dots, e_n)$ de E. La famille $(f_1 + g_1, \dots, f_k + g_k, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire

commun de F et de G dans E. En effet, par construction, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un supplémentaire de $F+G$ dans E, donc la famille considérée engendre un espace dont l'intersection avec F et G est nulle. Il a par ailleurs une dimension $f+n$ qui est complémentaire de celle de F (qui vaut p) dans E (qui est de dimension $k+p+n$ au vu de la base construite pour E. De même, ce sous-espace est supplémentaire de G.

Exercice 11 (***)

1. Une matrice symétrique s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, donc $\mathcal{S} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}) = 6$.
   De même, $\dim(\mathcal{A}) = 3$, et $\mathcal{A} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
2. La trace étant linéaire, $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On peut décrire $\mathcal{T}$ comme l'ensemble des matrices vérifiant l'unique équation $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$, système ô combien difficile à résoudre, dans lequel on ne peut exprimer qu'une pauvre inconnue en fonction des huit autres (dont six n'apparaissent tout bonnement pas dans l'équation). On en déduit que $\dim(\mathcal{T}) = 8$. On trouve facilement une base même si c'est très pénible à expliciter : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. C'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'équations, donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. En notant les coefficients d'un matrice de M dans l'ordre alphabétique, on doit avoir $a+b+c = d+e+f = g+h+i = a+d+g = b+e+h = c+f+i = a+e+i = c+e+g$. On obtient facilement $g = b+c-d$, $h = a+c-e$ et $i = a+b-f$, ce qui nous ramène aux conditions suivantes sur les six premiers coefficients (en supprimant les égalités sur les colonnes qu'on vient d'exploiter et en remplaçant dans tout le reste) : $a+b+c = d+e+f = 2(a+b+c)-d-e-f = 2a+b+e-f = b+2c+e-d$. On peut supprimer le troisième nombre qui est toujours égal aux deux premiers si ceux-ci sont égaux. Reste $a+b+c = d+e+f = 2a+b+e-f = b+2c+e-d$. On en déduit que $f = a-c+e$ (en exploitant $a+b+c = 2a+b+e-f$) et $d = c+e-a$, donc en remplaçant dans la première égalité, $a+b+c = 3e$, soit $e = \dfrac{a+b+c}{3}$. On peut alors tout exprimer en fonction de a, b et c : $d = c+e-a = -\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{4}{3}c$, $f = \dfrac{4}{3}a + \dfrac{1}{3}b - \dfrac{2}{3}c$, puis $g = b+c-d = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{3}c$, $h = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{3}b + \dfrac{2}{3}c$ et $i = -\dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}b + \dfrac{2}{3}c$. Les trois coefficients de la première ligne peuvent être choisis comme on le souhaite, les autres sont alors imposés, donc $\dim(\text{M}) = 3$, on en trouve une base en imposant successivement la valeur 3 (on pourrait prendre 1 mais avec 3 tous les coefficients seront entiers) aux réels a, b et c et 0 à chacun des deux autres. Ainsi, $\text{M} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.
5. Par rapport à la question précédente, si on veut une matrice symétrique, on ajoute les condi-

tions $b=d$, $c=g$ et $f=h$. soit en reprenant les formules précédentes $b=-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{4}{3}c$, $c=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}c$ et $\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c$. Quitte à tout multiplier par 3 et à tout passer du même côté, ces trois équations deviennent $2a+2b-4c=2a+2b-4c=2a+2b-4c=0$. Les trois équations sont donc identiques et imposent $c=\frac{a+b}{2}$. Il reste deux coefficients « libres », donc $\dim(\mathrm{M}\cap\mathcal{S})=2$. On peut être plus précis et écrire que $\mathrm{S}\cap\mathcal{S}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\right)$. Si on tient à mettre un 1 en haut à gauche, on peut par exemple prendre $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ (mais il y a plein d'autres possibilités, par exemple la première matrice de notre base divisée par 2).

6. On impose cette fois-ci six conditions supplémentaires : $a=e=i=0$, $b=-d$, $c=-g$ et $f=-h$. Si $a=0$, $e=\frac{b+c}{3}$ donc la condition $e=0$ impose $c=-b$. La condition $i=0$ est alors automatique, et les trois autres aussi : $d=\frac{1}{3}b-\frac{4}{3}b=-b$, $g=\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}b=b=-c$ et $f=\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c=b=-h$. On peut encore choisir librement la valeur de b, donc $\dim(\mathrm{M}\cap\mathcal{A})=1$, et $\mathrm{M}\cap\mathcal{A}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\right)$. Si on veut un coefficient 1 au bout de la première ligne, on prend l'opposé de la matrice qu'on vient de citer.
7. Cela découle immédiatement des calculs faits pour trouver la dimension de M, on remplit la matrice en respectant les équations trouvées dans la question 4 : $M=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}$.

Exercice 12 (***)

1. Même sans utiliser les polynômes de Lagrange, on constate que P_1 est un polynôme de degré 2 ayant 3 et 5 pour racines, donc $P_1=k(X-3)(X-5)$. La condition $P_1(1)=1$ impose $1=k\times(-2)\times(-4)$, soit $k=\frac{1}{8}$, et donc $P_1=\frac{1}{8}X^2-X+\frac{15}{8}$.
2. On peut procéder de même : $P_3=k(X-1)(X-5)$, avec $1=k\times 2\times(-2)$, donc $k=-\frac{1}{4}$ et $P_3=-\frac{1}{4}X^2+\frac{3}{2}X-\frac{5}{4}$. Enfin, on aura $P_5=k(X-1)(X-3)$ avec $k=8$, donc $P_5=\frac{X^2}{8}-\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}$.
3. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de ces trois polynômes s'annule : $aP_1+bP_3+cP_5=0$, alors les trois réels a, b et c doivent vérifier (quitte à tout multiplier par 8) $a(X^2-8X+15)-2b(X^2-6X+5)+c(X^2-4X+3)=0$, soit $(a-2b+c)X^2+(-8a+12b-4c)X+15a-10b+3c=0$. Un polynôme étant nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, nos réels sont solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc}a&-2b&+&c&=&0\\-2a&+&3b&-&c&=&0\\15a&-&10b&+&3c&=&0\end{array}\right.$. Les opérations L_1+L_2 et L_3-3L_1 donnent alors les équations $b-a=12a-4b=0$, qui impliquent rapidement $a=b=0$, ce qui induit à son tour $c=0$. La famille est donc bien libre. Les plus malins auront évité ces calculs en pensant à remplacer X par 1, 3 et 5 dans la combinaison initiale pour obtenir immédiatement $a=b=c=0$ au vu de la définition des trois polynômes.

4. Il s'agit d'une famille libre de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est automatiquement une base.
5. Il faut cette fois chercher trois réels a, b et c vérifiant $aP_1 + bP_3 + cP_5 = X^2 - 3X - 1$, ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} a - 2b + c = 8 \\ -2a + 3b - c = 6 \\ 15a - 10b + 3c = -8 \end{cases}$ (attention à ne pas oublier bêtement de multiplier les membres de droite par 8 pour les deux équations extrêmes, et par 2 pour celle du milieu puisqu'on l'avait simplifiée par 4 en passant). Les mêmes opérations sur les lignes que tout à l'heure donnent $b - a = 2$ et $12a - 4b = -32$. On peut diviser la deuxième équation par 4 : $3a - b = -8$, donc en substituant $3a - (a + 2) = -8$, ce qui donne $a = -3$, puis $b = -3 + 2 = -1$ et enfin $c = 8 - a + 2b = 9$ (en reprenant par exemple la première équation du système). Les coordonnées recherchées sont donc $(-3, -1, 9)$.
6. On calcule facilement $Q(1) = -3$, $Q(3) = -1$ et $Q(5) = 9$. Aucune coïndidence invraisemblable là-dessous, encore une fois il suffit de remplacer X par 1, 3 et 5 dans l'égalité définissant le système qu'on vient de résoudre pour trouver directement a, b et c à l'aide de la définition des polynômes.
7. Il faut donc effectuer la division euclidienne de X^5 par $P_0 = (X - 1)(X - 3)(X - 5) = X^3 - 9X^2 + 23X - 15$. Eh bien allez, un peu de motivation :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & & & & & & & & & X^3 - 9X^2 + 23X - 15 \\ \hline
- & (X^5 & - & 9X^4 & + & 23X^3 & - & 15X^2) & & & X^2 + 9X + 58 \\
 & & & 9X^4 & - & 23X^3 & + & 15X^2 & & & \\
 & & - & (9X^4 & - & 81X^3 & + & 207X^2 & - & 135X) & \\
 & & & & & 58X^3 & - & 192X^2 & + & 135X & \\
 & & & & - & (58X^3 & - & 522X^2 & + & 1\,334X \quad - \quad 870) & \\
 & & & & & & & 330X^2 & - & 1\,199X \quad + \quad 870 &
\end{array}$$

On en déduit donc que $f(P) = 330X^2 - 1\ 199X + 870$. Quoi, il fallait vraiment faire un calcul aussi ignoble ? Mais quel est le malade qui a posé un tel exercice ? Bon, le malade propose une autre méthode, consistant à poser $f(P) = aX^2 + bX + c$ (le reste est forcément de degré inférieur ou égal à 2), puis à poser comme d'habitude $X = 1$, $X = 3$ et $X = 5$, ce qui mène aux trois équations $a + b + c = 1$ (très sympa), $9a + 3a + c = 243$ (déjà un peu moins sympa), et $25a + 5b + c = 3\ 125$ (là c'est assez atroce, mais bon, vu les solutions qu'on est censés obtenir, ce n'est pas très surprenant). On résout ce petit système et on retrouve bien sûr les valeurs obtenues plus haut. Bon, ok, c'est pas vraiment mieux.
8. Si on connait son théorème de division euclidienne, c'est évident : le reste a un degré strictement inférieur à celui de P_0, donc est de degré inférieur ou égal à 2.
9. On a $f(P) = 0$ si et seulement si P est divisible par P_0, donc si $P = kP_0$, avec $k \in \mathbb{R}$, puisque P est supposé de degré égal à celui de P_0.
10. Puisqu'on a prouvé plus haut que (P_1, P_3, P_5) est une base de E, on peut écrire $f(P) = aP_1 + bP_3 + cP_5$. En évaluant pour $X = 1$, 3 et 5 (on commence à avoir l'habitude), on trouve $a = f(P)(1)$, $b = f(P)(3)$, et $c = f(P)(5)$. Mais par définition, on a $P = P_0Q + f(P)$ (division euclidienne), avec $P_0(1) = P_0(3) = P_0(5)$, donc $f(P)$ prend les mêmes valeurs que P pour $X = 1$, 3 ou 5, ce qui prouve exactement ce qui était demandé.

Exercice 13 (***)

1. Avec les notations imposées par l'énoncé, l'égalité $AX = -X$ se traduit par le système $\begin{cases} 5x - 10y - 4z = -x \\ 3x - 6y - 2z = -y \\ -3x + 5y + z = -z \end{cases}$. En passant tout à gauche (et en divisant la première

par deux), on obtient trois fois la même équation $3x-5y-2z=0$. On peut donc exprimer $z=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y$, et en déduire que $G_1=\text{Vect}((2,0,3);(0,2,-5))$ (on peut multiplier par 2 les deux vecteurs de la base, ça ne change rien). En particulier, G_1 est bien un sous-espace vectoriel de E, et $\dim(G_1)=2$.

2. On se ramène cette fois-ci au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 10y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 8y & - & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Les opérations L_2-L_1 et L_1+L_3 donnent les équations $2y+2z=0$ et $-5y-5z=0$, qui sont manifestement équivalentes. On garde donc la condition $z=-y$ et on reporte dans l'une des équations du système initial pour en déduire $3x-6y=0$, soit $x=2y$. On a donc $G_2=\text{Vect}((2,1,-1))$, c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

3. On peut déjà constater que $\dim(G_1)+\dim(G_2)=2+1=3=\dim(E)$, il suffit donc de prouver que $G_1\cap G_2=\{0\}$ pour conclure à la supplémentarité. Or, si $(x,y,z)\in G_1\cap G_2$, la matrice-colonne X correspondante vérifie à la fois $AX=-X$ et $AX=2X$, donc $-X=2X$ et $X=0$, ce qui prouve que $G_1\cap G_2=\{0\}$. Les deux sous-espaces sont bien supplémentaires dans E.

4. Posons donc $P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer son inverse éventuel, cherchons à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & 2z & = & a \\ & & 2y & + & z & = & b \\ 3x & - & 5y & - & z & = & c \end{array}\right.$. Procédons pour une fois par substitution : les deux premières équations donnent $x=\frac{a}{2}-z$ et $y=\frac{b}{2}-\frac{z}{2}$. En reportant dans la troisième équation, $\frac{3}{2}a-3z-\frac{5}{2}b+\frac{5}{2}z-z=c$, soit $-\frac{3}{2}z=-\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}b+c$, et donc $z=a-\frac{5}{3}b-\frac{2}{3}c$. On en déduit que $x=-\frac{1}{2}a+\frac{5}{3}b+\frac{2}{3}c$ et $y=-\frac{1}{2}a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c$. La matrice P est donc bien inversible, d'inverse $P^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

5. Le résultat intermédiaire dépend du chois de la matrice P, mais pas le résultat final (à l'ordre près des coefficients sur la diagonale). Avec la matrice P choisie ci-dessus, on trouve $AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Il est facile de prouver que F est un sous-espace vectoriel de E en revenant à la caractérisation classiques des sous-espaces vectoriels : la matrice nulle commute avec tout le monde donc appartient à F ; si $AM=MA$, alors $\lambda AM=\lambda MA$; et si de plus $AN=NA$, alors $A(M+N)=AM+AN=MA+NA=(M+N)A$, donc l'ensemble est stable par somme et par produit par un réel. Pour obtenir une base, il va toutefois falloir résoudre le système, ce qui va demander un tout petit peu d'abnégation. En notant de a à i les coefficients de la matrice M, on calcule $AM=\begin{pmatrix} 5a-10d+4g & 5b-10e+4h & 5c-10f+4i \\ 3a-6d-2g & 3b-6e-2h & 3c-6f-2i \\ -3a+5d+g & -3b+5e+h & -3c+5f+i \end{pmatrix}$, puis $MA=\begin{pmatrix} 5a+3b-3c & -10a-6b+5c & -4a-2b+c \\ 5d+3e-3f & -10d-6e+5f & -4d-2e+f \\ 5g+3h-3i & -10g-6h+5i & -4g-2h+i \end{pmatrix}$. L'égalité de ces deux produits se tra-

duit par l'horrible système $\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} & & 3b & - & 3c & +10d & + & 4g & = & 0 \\ 10a & + & 11b & - & 5c & - & 10e & - & 4h & = & 0 \\ 4a & + & 2b & + & 4c & - & 10f & - & 4i & = & 0 \\ 3a & - & 11d & - & 3e & + & 3f & - & 2g & = & 0 \\ & & 3b & + & 10d & - & 5f & - & 2h & = & 0 \\ 3c & + & 4d & + & 2e & - & 7f & - & 2i & = & 0 \\ 3a & - & 5d & + & 4g & + & 3h & - & 3i & = & 0 \\ 3b & - & 5e & - & 10g & - & 7h & + & 5i & = & 0 \\ & & 3c & - & 5f & - & 4g & - & 2h & = & 0 \end{array}\right.$. Essayons d'exprimer les trois dernières inconnues en fonctions des six premières : $g = -\frac{3}{4}b + \frac{3}{4}c - \frac{5}{2}d$ dans la première équation, $i = a + \frac{1}{2}b + c - \frac{5}{2}f$ dans la troisième équation, et $h = \frac{3}{2}b + 5d - \frac{5}{2}f$ dans la cinquième équation. On constate qu'on n'a pas utilisé la variable e, et qu'on peut obtenir cette dernière en fonction des cinq autres en exploitant la deuxième équation : $e = a + \frac{11}{10}b - \frac{1}{2}c - \frac{2}{5}h = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c - 2d + f$. Remplaçons désormais tout dans le membre de gauche de chacune des cinq équations restantes, celui de la quatrième équation initiale devient $3a - 11d - 3e + 3f - 2g = 3a - 11d - 3a - \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c + 6d - 3f + 3f + \frac{3}{2}b - \frac{3}{2}d + 5d = 0$ puisque tout s'annule. Autant dire que cette équation ne sert plus rien et peut être allègrement supprimée. Passons à la sixième équation : $3c + 4d + 2e - 7f - 2i = 3c + 4d + 2a + b - c - 4d + 2f - 7f - 2a - b - 2c + 5f = 0$. Encore une où tout s'annule, on supprime et on passe à la septième équation : $3a - 5d + 4g + 3h - 3i = 3a - 5d - 3b + 3c - 10d + \frac{9}{2}b + 15d - \frac{15}{2}f - 3a - \frac{3}{2}b - 3c + \frac{15}{2}f = 0$. Incroyable, encore une équation de moins ! Passons donc à la huitième : $3b - 5e - 10g - 7h + 5i = 3b - 5a - \frac{5}{2}b + \frac{5}{2}c + 10d - 5f + \frac{15}{2}b - \frac{15}{2}c + 25d - \frac{21}{2}b - 35d + \frac{35}{2}f + 5a + \frac{5}{2}b + 5c - \frac{25}{2}f = 0$. Mais oui, tous ces coefficients absolument atroces s'annulent bel et bien. Encore une équation, mais j'imagine que vous vous doutez de ce qui va se produire : $3c - 5f - 4g - 2h = 3c - 5f + 3b - 3c + 10d - 3b - 10d + 5f = 0$. Encore une équation à jeter à la poubelle, ce qui revient à dire que les cinq inconnues a, b, c, d et f peuvent être choisies comme on le souhaite, et donc que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 5. Pour obtenir une base de F, on fixe l'une de ces cinq inconnues égale à 1 et les quatre autres égales à 0, ce qui nous donne la famille de matrices suivante : I, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Les coordonnées de la matrice A elle-même dans cette base sont tout bêtement $(5, -10, -4, 3, -2)$, puisqu'il suffit de prendre les valeurs des coefficients en position a, b, c, d et f vu la base choisie.

Exercice 14 (**)

1. (a) C'est essentiellement évident : si on connait les deux premiers termes de la suite, alors on pourra calculer par récurrence double triviale chacun des termes suivants, et réciproquement on ne peut pas définir la suite sans connaitre ses deux premiers termes puisque ceux-ci peuvent être choisis librement.

   (b) La suite nulle vérifie la relation de récurrence ($0 - 0 + 0 = 0$, ça marche assez bien). Si (u_n) vérifie la relation, alors (λu_n) aussi (il suffit de multiplier la relation par λ), et si (v_n) est une deuxième suite vérifiant la même relation, en additionnant les deux égalités, on obtiendra immédiatement que $(u_n + v_n)$ est aussi une suite de F. L'ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

   (c) Ces deux suites sont bien définies de façon unique d'après les remarques faites à la première question. Elles forment une famille libre de façon évidente puisqu'elles ne sont pas proportionnelle : si $av_n + bw_n = 0$, on obtient immédiatement $a = 0$ en prenant $n = 0$ et $b = 0$ en posant $n = 1$. Le caractère générateur est moins évident. Soit (u_n) une suite appartenant à F, posons, pour tout entier n, $z_n = u_0 \times v_n + u_1 \times w_n$. La suite (z_n) appartient certainement à F puisqu'elle est combinaison linéaire des deux suites (v_n) et (w_n) qui sont donc F. De plus, par construction, $z_0 = u_0 \times 1 + u_1 \times 0 = u_0$, et de même $z_1 = u_1$. La suite (z_n) est donc une suite de F ayant les mêmes premiers termes que (u_n), elle est forcément égale à (u_n). Comme $(z_n) \in \mathrm{Vect}((v_n), (w_n))$ par construction, on a bien prouvé que notre famille est génératrice de F, et donc une base de F. On en déduit immédiatement que $\dim(F) = 2$.

2. (a) Dans ce cas, la relation peut s'écrire $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$, ce qui est effectivement une définition possible des suites arithmétiques (c'est même l'origine du nom donné à ces suites : chaque terme de la suite est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'entourent ; si on remplace cette condition par une moyenne géométrique, on obtient sans grande surprise des suites géométriques !). Une façon originale de faire : les suites arithmétiques vérifient en effet cette condition, puisque $u_n = u_0 + nr \Rightarrow u_n + u_{n+2} = 2u_0 + (2n+2)r = 2u_{n+1}$, et l'espace vectoriel des suites arithmétiques est de dimension 2 (une suite arithmétique étant définie de façon unique par son premier terme et sa raison). Comme il est inclus dans F et que F est lui-même de dimension 2, on en déduit qu'ils sont égaux, et que les suites de F sont toutes les suites arithmétiques.

   (b) Il suffit d'écrire la condition, en remplaçant u_n par sa valeur : $pt^{k+2} - t^{k+1} + (1-p)t^k = 0$. On factorise par t^k (qui ne sera pas nul si on choisit un $t \neq 0$) pour obtenir immédiatement $pt^2 - t + 1 - p = 0$. L'équation du second degré obtenu admet pour discriminant $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$, et pour racines $t_1 = \dfrac{1 + 2p - 1}{2p} = 1$, et $t_2 = \dfrac{1 - 2p + 1}{2p} = \dfrac{1}{p} - 1$. Les deux suites $(v_n) = (1)$ (suite constante) et $(w_n) = \left(\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)^n\right)$ appartiennent donc à F et, n'étant pas proportionnelles, forment une famille libre d'éléments de F. Comme F est de dimension 2, la famille $((u_n), (v_n))$ est donc une base de F. Toute suite appartenant à F peut donc s'écrire sous la forme $u_n = A + B\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)^n$. Notez qu'on vient ainsi de démontrer à l'aide d'espaces vectoriels un cas particulier du théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (dont le cas général se démontre rigoureusement par la même méthode).

   (c) On sait dans ce cas que (u_n) est une suite arithmétique, donc $u_n = u_0 + nr = 1 + nr$. La condition $u_i = 0$ implique $1 + ri = 0$, soit $r = -\dfrac{1}{i}$, et on en déduit que $u_n = 1 - \dfrac{n}{i}$.

   (d) Cette fois-ci on sait que $u_n = A + Bx^n$. La première condition initiale (pour $n = 0$) se traduit par l'égalité $A + B = 1$, et la deuxième par $A + Bx^i = 0$. En soustrayant les deux, on a $B(1 - x^i) = 1$, soit $B = \dfrac{1}{1 - x^i}$, puis $A = 1 - B = -\dfrac{x^i}{1 - x^i}$. Finalement, $u_n = \dfrac{x^n - x^i}{1 - x^i}$.

3. (a) C'est exactement la même méthode, l'ensemble G est un sous-espace vectoriel de E de façon évidente en revenant à la définition. On définit ensuite trois suites appartenant à G de la façon suivante : $v_0 = 1$, $v_1 = v_2 = 0$ et les termes suivants de la suite (v_n) sont déterminés par la relation de récurrence définissant G ; $w_1 = 1$, $w_0 = w_2 = 0$ et de même $(w_n) \in G$; et enfin $t_0 = t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ avec $(t_n) \in G$. Ces trois suites forment très clairement une famille libre de G, mais aussi une famille génératrice car toute suite (u_n) appartenant à G peut s'écrire $u_n = u_0v_n + u_1w_n + u_2t_n$ (exactement le même raisonnement qu'en 1.c). Du coup, (v, w, t) est une base de G, qui est un espace vectoriel de dimension 3.

(b) On copie cette fois-ci le raisonnement de la question 2.b : la suite géométrique de raison t est dans G si $4t^3 - 4t^2 - t + 1 = 0$. Or, cette équation se factorise sous la forme $4t^2(t-1)-(t-1) = 0$, soit $(t-1)(4t^2-1) = 0$. Elle admet pour solution $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$ et $t_3 = -\frac{1}{2}$. Les trois suites $z_1 = (1)$, $z_2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $z_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ appartiennent donc à G. Elles forment par ailleurs une famille libre : si on suppose que $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$, alors on aura $a + b + c = 0$ (pour $n = 0$) ; $a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 0$ (pour $n = 1$) et $a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c = 0$ (pour $n = 2$). La soustraction des deux premières équations donne $\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c = 0$, la soutraction des deux dernières donne $\frac{1}{4}b - \frac{3}{4}c = 0$, ces deux conditions ne peuvent être vérifiées que si $b = c = 0$, et donc $a = 0$. Cette famille libre de trois suites dans un espace vectoriel de dimension 3 est nécessairement une base de G.

(c) Toute suite appartenant à G peut donc s'écrire sous la forme $u_n = A + \frac{B}{2^n} + \frac{C}{(-2)^n}$. Avec les conditions initiales données, et quitte à multiplier par 2 et 4 les deux dernières, on doit donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 2a & + & b & - & c & = & 5 \\ 4a & + & b & + & c & = & 7 \end{array}\right.$. Soustraire les deux équations extrêmes donne immédiatement $3a = 6$, soit $a = 2$. On a ensuite $b + c = -1$ et $b - c = 1$, dont on déduit facilement que $b = 0$ et $c = -1$. Autrement dit, $u_n = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.