Feuille d'exercices n° 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 octobre 2021

Exercice 1 (* à **)

Pour simplifier la présentation des calculs, on présentera en général les calculs de primitives sous la forme d'intégrales sans borne inférieure. Les calculs seront faits ligne par ligne, et on ne précisera jamais après avoir donné une intégrale qu'il existe une constante d'intégration réelle à ajouter à chaque fois :

- Ici, mieux vaut directement donner $F(x) = \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$, primitive valable sur chacun des deux intervalles de définition de f, à savoir $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
- On reconnaît ici une fonction de la forme $u'u$ sous l'intégrale : $F(x) = \displaystyle\int^x \cos(t)\sin(t)\ dt = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$.
- Le seul espoir consiste ici à tenter une intégration par parties en posant $u(t) = \arctan(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = t$, ce qui donne $F(x) = \displaystyle\int^x \arctan(t)\ dt = x\arctan(x) - \int^x \frac{t}{1+t^2}\ dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $F(x) = \displaystyle\int^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt = \int \frac{2}{e^t + e^{-t}}\ dt = \int \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\ dt$. Effectuons le changement de variable $u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$, ce qu'on peut faire sur n'importe quel intervalle), ce qui donne $du = e^t dt$, et transforme notre intégrale en $F(x) = \displaystyle\int^t \frac{2}{u^2+1}\ du = 2\arctan(t) = 2\arctan(e^x)$. Les plus curieux constateront que d'autres changements de variables sont possibles, qui donnent de façon intéressante d'autres expressions de nos primitives. Par exemple, en posant directement $u = \mathrm{sh}(t)$ dans l'intégrale initiale, $du = \mathrm{ch}(t)dt$, et $F(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\ dt = \int^t \frac{1}{1+u^2}\ du$ puisque $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t)$. On trouve alors $F(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$, qui est toujours égal à $2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$ (avouez que ça n'a rien d'évident).
- $F(x) = \displaystyle\int^x t\sin(t)\sin^2(t)\ dt = \int^x t\sin(t)(1-\cos^2(t))\ dt = \int^x t\sin(t)\ dt - \int^x t\sin(t)\cos^2(t)\ dt$. Coupons l'intégrale en deux pour alléger un peu la rédaction : $F_1(x) = \displaystyle\int^x t\sin(t)\ dt = -t\cos(t) + \int^x \cos(t)\ dt = -x\cos(x) + \sin(x)$ par intégration par parties facile. Passons au deuxième morceau, où on va aussi pouvoir faire une IPP en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = -\sin(t)\cos^2(t)$, soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{3}\cos^3(t)$ (coup de pot, cette primitive !), ce qui donne $F_2(x) = \displaystyle\int^x -t\sin(t)\cos^2(t) = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \int^x \frac{1}{3}\cos^3(t)\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\int^x \cos(t)(1-$

$\sin^2(t))\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\sin^3(x)$. Finalement, on trouve brillamment $F(x) = \frac{x}{3}\cos^3(x) - x\cos(x) + \frac{1}{9}\sin^3(x) + \frac{2}{3}\sin(x)$. Une autre méthode possible est la linéarisation : $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, donc $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$, on peut ensuite effectuer une IPP sur chaque moitié (en dérivant le x à chaque fois) : $F(x) = \int^x \frac{3}{4}t\sin(t) - \frac{1}{4}t\sin(3t)\ dt = -\frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\int^x \cos(t)\ dt + \frac{1}{4}\frac{x\cos(3x)}{3} - \frac{1}{12}\int^x \cos(3t)\ dt = -\frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}x\cos(3x) - \frac{1}{36}\sin(3x)$.

- On ne se fatigue surtout pas, f est à peu près de la forme $u'\sqrt{u}$, qui a une primitive proportionnelle à $u^{\frac{3}{2}}$. Ici, on trouve donc directement $F(x) = \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout comme f).
- On a vraiment très envie d'effectuer le changement de variables $u = \ln(t)$, ce qui donne $du = \frac{1}{t}dt$ (ça tombe bien, $\frac{1}{t}$ se met facilement en facteur dans l'intégrale) pour trouver $F(x) = \int^x \frac{1}{t(1+\ln^2(t))}\ dt = \int^t \frac{1}{1+u^2}\ du = \arctan(\ln(x))$, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pouvait bien sûr remarquer directement que la fonction f est la dérivée de la fonction obtenue).
- Effectons deux IPP successives en dérivant à chaque fois la fonction hyperbolique et en primitivant la fonction trigonométrique (on peut bien sûr faire le contraire, ça marche pareil) : $F(x) = \int^x \operatorname{ch}(t)\cos(t)\ dt = \operatorname{ch}(x)\sin(x) - \int^x \operatorname{sh}(t)\sin(t)\ dx = \operatorname{ch}(x)\sin(x) + \operatorname{sh}(x)\cos(x) - \int^x \operatorname{ch}(t)\cos(t)\ dx = \operatorname{ch}(x)\sin(x) + \operatorname{sh}(x)\cos(x) - F(x)$. Du coup, $2F(x) = \operatorname{ch}(x)\sin(x) + \operatorname{sh}(x)\cos(x)$ et $F(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x)\sin(x) + \operatorname{sh}(x)\cos(x))$.
- Une toute petite astuce suffit : $F(x) = \int^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\ dt = \int^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dt = x - \arctan(x)$.
- Ici, on peut au choix utiliser la même astuce que dans le calcul précédent (ce qui est sous l'intégrale s'écrit $\sqrt{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, et tout s'intègre directement), ou bien, pour mieux voir ce qui se passe, effectuer le petit changement de variable $u = t+1$: $\int^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}\ dt = \int^t \frac{u-1}{\sqrt{u}}\ du = \int^t \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t} = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}\right)\sqrt{x-1}$. Cette primitive est valable sur tout l'intervalle $]-1,+\infty[$.
- Encore un bon exemple d'IPP astucieuse, en posant $u(t) = \ln(1+t^2)$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve $F(x) = \int^x \ln(1+t^2)\ dt = x\ln(1+x^2) - \int^x \frac{2t^2}{1+t^2}\ dx = x\ln(1+x^2) - 2\int^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$ (même astuce que la neuvième intégrale de ce même exercice pour la fin du calcul).
- À part une IPP, on ne voit pas bien quoi faire : posons $u(t) = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$, soit $u'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve alors $F(x) = \int^x \ln(t + \sqrt{t^2-1})\ dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \int^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\ dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}$, primitive valable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

Le corrigé continuera à être rédigé ligne par ligne.

- Un simple changement de variables $t = x + 1$ simplifie énormément le calcul : $I = \int_0^1 (x - 2)(x+1)^5 \, dx = \int_1^2 (t-3)t^5 \, dt = \int_1^2 t^6 - 3t^5 \, dt = \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{187}{14}$.
- Un simple enchaînement d'IPP suffit, en posant $u(x) = (\ln(x))^3$, soit $u'(x) = \frac{3(\ln(x))^2}{x}$, et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, ce qui donne $I = \int_1^e x^2(\ln(x))^3 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x))^3\right] - \int_1^e x^2(\ln(x))^2 \, dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e x^2(\ln(x))^2 \, dx$. On effectue une deuxième IPP en posant $u(x) = (\ln(x))^2$, soit $u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$, et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, pour trouver $I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)^2\right] + \int_1^e \frac{2x^2}{3}\ln(x) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln(x) \, dx$. Allez, une dernière IPP pour finir, en posant $u(x) = \ln(x)$, soit $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $v'(x) = x^2$, donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$. On finit par obtenir $I = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right] - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3 - 2}{27} = \frac{4e^3 + 2}{27}$.
- On reconnait ici à très peu de choses près une forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre directement (si vraiment on n'est pas réveillés, un petit changement de variables $t = e^{2x}$ permet aussi de se tirer d'affaire) : $I = \int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} \, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
- On peut s'en sortir rapidement en se souvenant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$, d'où $I = \frac{1}{2}\int 0^{2\pi} \cos(2x) + 1 \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right]_0^{2\pi} = \pi$. Allez, une technique hyper astucieuse pour ceux qui aiment : on peut constater que $I = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \, dx$ (intégrer le carré du cosinus ou du sinus sur une période donne la même chose), puis faire la somme des deux pour trouver $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x) \, dx = \int_0^{2\pi} 1 \, dx = 2\pi$. Chacune des deux intégrales vaut donc π.
- On reconnait immédiatement $\frac{u'}{u^2}$ (ce n'est pas parce que le x est au dénominateur qu'il faut se laisser avoir), du coup $I = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ (au pire, le changement de variable $t = \ln(u)$ ramène au même calcul).
- On peut intégrer directement si on est un tout petit peu malin : $I = \int_0^1 \frac{x}{1 + (x^2)^2} \, dx = \left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.
- Parfois, la méthode bêtement bourrine est efficace, remplacer joyeusement tout par des exponentielles fonctionne. Commençons par calculer $\mathrm{sh}^2(x)\,\mathrm{ch}^2(x) = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{4x} - 2 + e^{-4x}}{16}$, puis intégrons : $I = \frac{1}{16}\int_0^{\ln(2)} e^{4x} + e^{-4x} - 2 \, dx = \frac{1}{16}\left[\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{4} - 2x\right]_0^{\ln(2)} =$

$\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{16}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16\times 4}+\dfrac{1}{4}-2\ln(2)\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{1\ 024}-\dfrac{\ln(2)}{8}=\dfrac{255}{1\ 024}-\dfrac{\ln(2)}{8}$.

- Un exemple surprenant de double intégration par parties : on commence par poser $u(x) = \cos(x)$, donc $u'(x) = -\sin(x)$, et $v'(x) = v(x) = e^x$, pour trouver $I = [e^x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\ dx$, et on recommence, toujours avec $v'(x) = v(x) = e^x$, et $u(x) = \sin(x)$, donc $u'(x) = \cos(x)$. On a cette fois $I = -1 + [e^x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$. Autrement dit, $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$, et $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.
- De qui se moque-t-on dans cet exercice ? On a déjà fait la même en plus facile à la deuxième intégrale ! Au moins, ici, deux IPP suffiront, je ne détaille pas autant que la première fois, on dérive bien sûr toujours les puissances de ln pour intégrer les x : $I = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x)^2\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e x\ln(x)\ dx = \dfrac{e^2}{2} - \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \dfrac{x}{2}\ dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{2} + \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^e = \dfrac{e^2-1}{4}$.
- On aimerait bien faire une IPP mais une primitive de $\sin^2$, ce n'est pas forcément trivial à trouver. Soit on en trouve une quand même en pensant qu'il y a un lien entre $\sin^2(x)$ et $\cos(2x)$ (petit truc déjà exploité un peu plus haut), soit on utilise une astuce en posant $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)\ dx$, et en calculant la somme et la différence de I et de J. Allez, faisons comme ça : $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)+\cos^2(x))\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\ dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^3}{24}$. La différence demande plus de boulot : $I - J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)-\cos^2(x))\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -x^2\cos(2x)\ dx$. Il va falloir faire une double IPP, en dérivant à chaque fois les x et en primitivant les fonctions trigonométriques : $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$, et $v'(x) = \cos(2x)$, donc $v(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, pour trouver $I - J = \left[-\dfrac{x^2}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ dx$. Il va évidemment falloir une deuxième IPP : $I - J = \left[-x\dfrac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(2x)}{2}\ dx = \dfrac{\pi}{4} + \left[\dfrac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$. Ne reste plus qu'à écrire que $I = \dfrac{I+J}{2} + \dfrac{I-J}{2} = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$.
- Il est plus simple pour la rédaction de calculer par IPP $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\ dx$: on pose $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$. On trouve alors $J = \left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x^2}{(1+x^2)2}\ dx = \dfrac{1}{2} + 2\int_0^1 \dfrac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\ dx = \dfrac{1}{2} + 2J - 2I$. Autrement dit, $I = \dfrac{1}{2}J + \dfrac{1}{4}$. Or, on sait calculer directement $J = [\arctan(x)]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$, dont on déduit $I = \dfrac{\pi+2}{8}$.
- Dans ce genre de cas, le changement de variable $t = 1 - x$ est le bienvenu (attention au changement de signe : $dt = -dx$) : $I = \displaystyle\int_1^0 -(1-t)^2\sqrt{t}\ dt = \int_0^1 (1-2t+t^2)\sqrt{t}\ dt = \int_0^1 \sqrt{t} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}}\ dt = \left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{16}{105}$.
- On a sous l'intégrale une forme $u'u$, qui est à un facteur près la dérivée de u^2, on fait donc une intégration directe : $I = \left[\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \dfrac{1}{2}$.

- C'est la même que la précédente ! Ah non, zut, la racine carrée complique tout. Pas tant que ça en fait : $I = \int_1^e \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$. effectuons un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$, donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, pour trouver $I = \int_1^{\sqrt{e}} 4\ln(t)\ dt = 4[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{e}} = 4(\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) - \sqrt{e} + 1) = 4 - 2\sqrt{e}$.

- Empressons-nous de poser $t = x + 1$ pour trouver $I = \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^2 t^{\frac{5}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{2(8\sqrt{2}-1)}{7} - \frac{6(4\sqrt{2}-1)}{5} + 2(2\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2} + 2 = \left(\frac{16}{7} - \frac{24}{5} + 2\right)\sqrt{2} - \frac{2}{7} + \frac{6}{5} = \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}$

Exercice 3 (** à ***)

- Ici, les plus malins feront la décomposition en éléments simples à vue (même pas besoin d'identification) : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, donc $I = \int_2^3 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_2^3 = \ln(3) - \ln(4) - \ln(2) + \ln(3) = 2\ln(3) - 3\ln(2) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

- La décomposition en éléments simples va être de la forme $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-2}$. En multipliant par $x - 2$ en en prenant $x = 2$, on trouve $\frac{3}{5} = c$. En multipliant tout par x et en prenant la limite en $+\infty$, $0 = a + c$, donc $a = -\frac{3}{5}$. Pour achever le calcul, on regarde pour $x = 0$: $-\frac{1}{2} = b - \frac{c}{2}$, donc $b = \frac{c-1}{2} = -\frac{1}{5}$. Finalement, $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{5(x^2+1)}\ dx = \left[\frac{3\ln(2-x)}{5} - \frac{3\ln(x^2+1)}{10}\ln(x^2+1) - \frac{\arctan(x)}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(2)\right) - \frac{3}{10}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}(2\ln(3) - 2\ln(2) - \ln(5)) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}\ln\left(\frac{9}{20}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. On ne peut pas vraiment simplifier plus, notamment l'arctangente qui ne correspond pas le moins du monde à un angle remarquable.

- On revient à du plus facile : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on peut décomposer sous la forme $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$. En multipliant par $x - 1$ puis par $x - 3$, on trouve facilement $-\frac{1}{2} = b$ et $\frac{1}{2} = b$, donc $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(3-x) - \ln(1-x)]_{-1}^0 = \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(4) + \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

- Comme on a déjà vu quasiment le même calcul en cours, je passe les détails : $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\ dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\ dt = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t)^2 + 1}\ dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

- Les primitives seront définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, on va déterminer une primitive définie sur le premier intervalle. On commence par une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant le facteur 1 : comme $x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$ a pour dérivée $\dfrac{-1}{(x-2)^2}$, celle de $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ vaut $\dfrac{-1}{(x-2)^2}\dfrac{1}{1+(\frac{x-1}{x-2})^2} = -\dfrac{1}{2x^2-6x+5}$. On trouve alors $F(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \displaystyle\int^x \dfrac{t}{2t^2-6t+5}\,dt$. Le dénominateur de la nouvelle intégrale ne s'annule jamais, mais on peut écrire $\displaystyle\int^x \frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt = \int^x \frac{1}{4}\frac{4t-6}{2t^2-6t+5} + \frac{3}{2}\frac{1}{2t^2-6t+5}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \int^x \frac{3}{4}\frac{1}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \int^x \frac{3}{(2t-3)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \frac{3}{2}\arctan(2x-3)$. Finalement, $F(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \dfrac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \dfrac{3}{2}\arctan(2x-3)$.

Exercice 4 (***)

1. Posons donc $u = \cos(t)$, ce qui transforme les bornes de notre intégrale en $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, et surtout l'élément différentiel vérifie $du = -\sin(t)\,dt$. Au niveau de la rédaction, il est plus commode de multiplier en haut et en bas par $\sin(t)$ dans l'intégrale initiale pour faire apparaitre le changement d'élément différentiel : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\cos^2(t)} \times \sin(t)\,dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{1-u^2}\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-u^2}\,du$. Il reste une petite décomposition en éléments simples à effectuer : $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{(1-u)(1+u)} = \dfrac{1-u+1+u}{2(1-u)(1+u)} = \dfrac{1}{2(1+u)} + \dfrac{1}{2(1-u)}$. On en déduit que $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\,du = \frac{1}{2}[\ln(1+u) - \ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) - \frac{\ln(3)}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\ln(3)}{2}$ en se rendant compte que $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^2$ (multiplication par la quantité conjuguée).
   Pour les fans d'astuces bizarres, une façon rapide de calculer une primitive de $\dfrac{1}{\sin(t)}$ est de faire un changement de variable beaucoup plus anodin en posant $t = 2u$: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(t)}\,dt = \int \frac{2}{\sin(2u)}\,du = \int \frac{1}{\sin(u)\cos(u)}\,du = \int \frac{1}{\tan(u)\cos^2(u)}\,du$, et on reconnait une forme $\dfrac{u'}{u}$ puisque la dérivée de la tangente est notamment égale à $\dfrac{1}{\cos^2}$. Du coup, $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(t)}\,dt = \ln(|\tan(u)|) = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right)$.

2. On commence donc par effectuer une IPP en posant $u'(x) = x$ et $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$, et $v(x) = \arctan(x)$, soit $v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On obtient donc $I = \int_0^1 x\arctan(x)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 -$

$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

3. Puisqu'on nous le propose, posons donc $t = \pi - x$, ce qui transforme les bornes de l'intégrale en π et 0 (autrement dit, on les échange) et l'élément différentiel en $dt = -dx$. Quitte à remettre les bornes dans le bon sens, on peut donc conserver bornes et élément différentiel identiques et ne modifier que ce qui se trouve sous l'intégrale. On sait que $\sin(x) = \sin(\pi - t) = \sin(t)$, et $\cos(x) = \cos(\pi - t) = -\cos(t)$, mais l'élévation au carré fait disparaitre ce changement de signe. On peut donc écrire $I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\, dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\, dt - I$. Or l'intégrale restante se calcule très bien, elle vaut $[-\arctan(\cos(x))]_0^\pi = -\arctan(-1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$. On a donc $2I = \frac{\pi^2}{2}$, soit $I = \frac{\pi^2}{4}$.

4. Tentons donc une IPP en posant $u'(t) = 1$ (et donc par exemple $u(t) = t$), et $v(t) = \sin(\ln(t))$ qui implique $v'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln(t))$. En notant I l'intégrale à calculer, on a donc $I = [t\sin(\ln(t))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(t))\, dt = -\int_1^{e\pi} \cos(\ln(t))\, dt$. On refait une IPP en posant toujours $u'(t) = 1$ et $u(t) = t$, et cette fois $v(t) = \cos(\ln(t))$, soit $v'(t) = -\frac{1}{t}\sin(\ln(t))$. On trouve alors $I = -[t\cos(\ln(t))]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} -\sin(\ln(t))\, dt = e^\pi + 1 - I$, donc $2I = e^\pi + 1$ et $I = \frac{e^\pi + 1}{2}$.
Autre méthode possible pour le calcul de I, un changement de variable $u = \ln(t)$ qui donne $dt = e^u\, du$ et $I = \int_0^\pi \sin(u)e^u\, du$, intégrale qui elle-même se calcule à l'aide d'une double IPP « circulaire ».

5. Commençons déjà par écrire $\tan(x) = \tan\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1-t^2}$. On en déduit que $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}$. On sait bien que $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, donc on déduit du calcul précédent que $\cos^2(x) = \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}$. Sur notre intervalle d'intégration, $t \in [0, 1]$, donc $1 - t^2 \geqslant 0$. De plus, $\cos(x)$ lui-même est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc on peut écrire que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. On calcule enfin $\sin(x) = \tan(x)\cos(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.
Il est temps d'effectuer le changement de variable proposé pour ce calcul d'intégrale. On a donc $x = 2\arctan(t)$, soit $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$, et les bornes deviennent 0 et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Autrement dit, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2+t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dt = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2 + 1}\, dt = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
Ce changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ permet en fait de transformer n'importe quel quotient faisant intervenir des puissances du cosinus et du sinus en fraction rationnelle « ordinaire », mais la technique n'est pas au programme.

Exercice 5 (**)

1. La primitive qui s'annule en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est évidemment la fonction arctangente.

2. Cherchons donc à calculer $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$ en effectuant le changement de variable $t = \tan(u)$, ou si on préfère $u = \arctan(t)$. On aura bien sûr $du = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$, ce qui permet d'éliminer le carré dans l'intégrale, et les bornes d'intégration vont devenir 0 et $\arctan(x)$, pour donner $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x)} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\,du = \int_0^{\arctan(x)} \cos^2(u)\,du$ en exploitant les deux formes de la dérivée de la fonction tangente. Or, $\cos^2(u) = \dfrac{\cos(2u)+1}{2}$ à l'aide des formules de duplication du cosinus, donc $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x)} \frac{\cos(2u)}{2} + \frac{1}{2}\,du = \frac{\sin(2\arctan(x))}{4} + \frac{\arctan(x)}{2}$. Reste à simplifier $\sin(2\arctan(x)) = 2\cos(\arctan(x))\sin(\arctan(x))$. On sait que $\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (ce cosinus est toujours positif au vu des valeurs prises par la fonction arctangente), puis $\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Finalement, $\sin(2\arctan(x)) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, puis $F_2(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(x) + \dfrac{x}{2(1+x^2)}$.

3. Partons par exemple de $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$, et effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$, donc $u'(t) = \dfrac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$, et $v'(t) = 1$ qu'on intégrera en $v(t) = t$. On obtient alors $F_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(F_n(x) - F_{n+1}(x))$. Autrement dit, on a $2nF_{n+1}(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)F_n(x)$, soit $F_{n+1}(x) = \dfrac{x}{2n(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}F_n(x)$.

4. En particulier, en prenant $n = 2$, $F_3(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{3}{4}F_2(x) = \dfrac{3}{8}\arctan(x) + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ (on peut regrouper les deux termes si on le souhaite).

Exercice 6 (***)

1. Cette équation ne peut évidemment avoir de sens que si $\cos(x) \neq 0$ (pour que la tangente soit définie), on peut l'écrire sous la forme $2\cos(x) + \dfrac{3\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ puis, après avoir multiplié par $\cos(x)$, sous la forme $2\cos^2(x) + 3\sin(x) = 0$, ou encore $2 - 2\sin^2(x) + 3\sin(x) = 0$. On pose maintenant $X = \sin(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $-2X^2 + 3X + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{-3-5}{-4} = 2$ et $X_2 = \dfrac{-3+5}{-4} = -\dfrac{1}{2}$. La condition $\sin(x) = 2$ n'étant jamais vérifiée, les seuls angles solutions sont ceux pour lesquels $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$, soit $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{2k\pi - \dfrac{\pi}{6}, 2k\pi - \dfrac{5\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ (en fait, il faut aussi enlever du

domaine de définition les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour lesquels la tangente n'est pas définie). L'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ne contenant aucune valeur interdite, la fonction f y est continue, et l'intégrale I est donc correctement définie.

2. Faisons donc ce qu'on nous conseille. Si on pose $t = \sin(x)$, on aura $dt = \cos(x)\ dx$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\cos(x)$, on fait naturellement apparaitre sous notre intégrale un $\cos(x)\ dx$ qu'on peut directement remplacer par dt. Reste alors sous l'intégrale l'expression $\frac{1 - 2\sin(x)}{2\cos^2(x) + 3\tan(x)\cos(x)} = \frac{1 - 2t}{2(1 - t^2) + 3t}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée par l'énoncé. Il ne reste plus qu'à modifier les bornes de l'intégrale : 0 devient $\sin(0) = 0$ et $\frac{\pi}{6}$ devient $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. On trouve donc $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2t}{2 - 2t^2 + 3t}\ dt$.
3. Le calcul effectué à la toute première question prouve que le dénominateur de cette fraction se factorise sous la forme $(2 + 3t - 2t^2) = (2 - t)(2t + 1)$ (attention tout de même à ne pas oublier le coefficient dominant égal à 2 et à ne pas faire d'erreur de signe). On peut donc décomposer la fraction sous la forme $\frac{1 - 2t}{2 + 3t - 2t^2} = \frac{a}{2 - t} + \frac{b}{2t + 1}$. En multipliant l'égalité par $2 - t$ puis en posant $t = 2$, on trouve $a = -\frac{3}{5}$. De même, en multipliant par $2t + 1$ puis en posant $t = -\frac{1}{2}$, on aura $b = \frac{4}{5}$. On conclut : $\frac{1 - 2t}{2 + 3t - 2t^2} = \frac{3}{5(t - 2)} + \frac{4}{5(2t + 1)}$.
4. On peut maintenant calculer facilement $I = \frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t - 2}\ dt + \frac{2}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2t + 1}\ dt = \frac{3}{5}[\ln(2 - t)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}[\ln(2t + 1)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{5}\ln(2) + \frac{2}{5}\ln(2) = \frac{3\ln(3) - 4\ln(2)}{5}$.
5. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, le cosinus et la tangente sont tous les deux strictement positifs, et le sinus est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, donc $1 - 2\sin(x) \geqslant 0$. On intègre donc une fonction toujours positive, l'intégrale doit être positive. C'est bien le cas : $3\ln(3) - 4\ln(2) \simeq 3.3 - 2.8 > 0$, donc $I > 0$.

Exercice 7 (***)

1. Posons donc $z(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, et dérivons z : $z'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$. La fonction z est constante sur $]0, +\infty[$, de valeur égale à $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
2. (a) Je ne ferai même pas de dessin clair : par définition, $\int_0^x f(t)\ dt$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et la droite verticale située à l'abscisse x. De même, $\int_0^{f(x)} g(t)\ dt$ est l'aire située entre la courbe de g etc. Mais on sait bien que la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. Quitte à inverser le rôle des deux axes, on peut donc visualiser la courbe de g dans le même repère que celle de f, et la deuxième intégrale correspond alors exactement à l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite horizontale située à ordonnée $f(x)$. Quand on additionne les deux aires, on obtient exactement l'aire du rectangle constitué par les deux axes et les deux droites (l'une verticale, l'autre horizontale) précédemment décrites. Ce rectangle est de largeur x et de hauteur $f(x)$, il a donc pour aire $xf(x)$, ce qui prouve notre formule.

(b) Par définition, $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^{f(x)} g(t)\ dt = F(x) + G(f(x))$ (on prend les primitives s'annulant en 0 pour simplifier le calcul).

(c) Pour faire réapparaitre les fonctions f et g, dérivons donc $H(x) = F(x) + G(f(x))$, on obtient $H'(x) = f(x) + f'(x)g(f(x)) = f(x) + xf'(x)$ puisque, par définition de la réciproque, $g(f(x)) = x$. Or, la formule obtenue pour $H'(x)$ est la même que celle de la dérivée de $xf(x)$. On en déduit que $H(x) = xf(x) + k$. Reste à constater que $H(0) = F(0) + G(f(0)) = F(0) + G(0) = 0$ (puisque les primitives s'annulent en 0) pour conclure que $H(x) = xf(x)$.

3. (a) On peut effectuer la division euclidienne, ou procéder par identification : $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (\sqrt{2}a + b)x^3 + (a + b\sqrt{2} + c)x^2 + (b + c\sqrt{2})x + c$. Par identification, on doit donc avoir $a = 1$; $\sqrt{2}a + b = 0$, soit $b = -\sqrt{2}$; $a + b\sqrt{2} + c = 0$, soit $c = -1 + 2 = 1$; $b + c\sqrt{2} = 0$ ce qui est vrai ; et $c = 1$ ce qui est vrai aussi. Finalement, $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

(b) Comme il n'y a pas de racines pour le dénominateur, le plus rapide est sûrement de faire une identification, ou d'être astucieux ! Constatons par exemple que $\dfrac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \dfrac{x^2 + \sqrt{2}x + 1 - x^2 + \sqrt{2}x - 1}{x^4 + 1} = \dfrac{2\sqrt{2}x}{x^4 + 1}$. Il suffit de tout multiplier par $\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir $\dfrac{x^2}{x^4 + 1} = \dfrac{x}{2\sqrt{2}(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} - \dfrac{x}{2\sqrt{2}(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$. Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, $b = d = 0$, et $c = -a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Calculons donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\, dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\, dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)]_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\, dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}))^2 + 1}\, dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x - 1)\right]_0^1 = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{4}$.

On fait le même calcul (ou presque) pour la deuxième moitié : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\, dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)]_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\, dx = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} - [\arctan(\sqrt{2}x + 1)]_0^1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} - \arctan(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}$.

On regroupe maintenant les deux résultats pour obtenir $J = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Or, $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ (en multipliant par la quantité conjuguée), donc $\arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(1 + \sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\ln(2 + \sqrt{2}) - \ln(2 - \sqrt{2}) = \ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) = \ln\left(\dfrac{6 + 4\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(3 + 2\sqrt{2})$. En regroupant tout, on obtient finalement (ouf !) : $J = \dfrac{\pi - \ln(3 + 2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$.

4. La fonction tangente étant continue strictement croissante et positive sur l'intervalle considéré, f aussi, et elle est donc bijective vers $[0, 1]$ (puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{1} = 1$). Si $y = \sqrt{\tan(x)}$, alors $x = \arctan(y^2)$, donc $g(x) = \arctan(x^2)$ (même pas de piège !).

5. On souhaite donc calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x^2)\, dx$. Procédons par IPP en posant $u(x) = \arctan(x^2)$,

donc $u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$, et $v'(x) = 1$ qui donne $v(x) = x$. On obtient alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx = [x\arctan(x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\ dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi(1-\sqrt{2})}{4}$ (on a utilisé le résultat du calcul de J).

Il ne reste plus, en appliquant la question 2 avec $x = \dfrac{\pi}{4}$, qu'à constater que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\ dt + \int_0^1 g(t)\ dt = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $\displaystyle I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 g(t)\ dt = 2J = \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 8 (* à **)

1. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

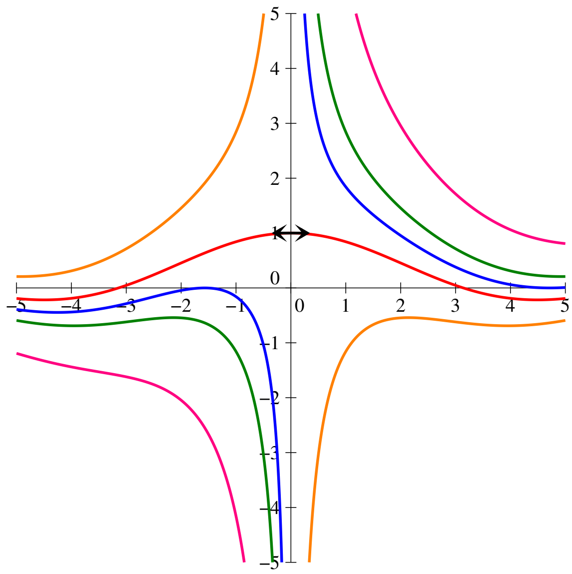
   On peut chercher une solution particulière à l'équation sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{2x}$. On a alors $y'(x) = (K'(x) + 2K(x))e^{2x}$, donc y_p est solution si $K'(x) = (\sinh x - 2x\cosh x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-x} - e^{-3x}}{2} - xe^{-x} - xe^{-3x}$, soit par exemple $\displaystyle K(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} - te^{-t} - te^{-3t}\ dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6} + [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t}\ dt + \left[t\frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-3t}}{3}\ dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{9} + A = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{18}\right)e^{-3x} + A$, où A est une constante qu'on peut ignorer (on a effectué des intégrations par partie pour les produits de t par des exponentielles). Les solutions complètes sont donc les fonctions $y(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{x} + \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{18}\right)e^{-x} + Ke^{2x}$.

   Autre possibilité pour trouver une solution particulière, écrire le second membre sous la forme $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - x(e^x + e^{-x}) = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x - \left(\dfrac{1}{2} + x\right)e^{-x}$ et utiliser le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $y' - 2y = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax+b)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (ax + a + b)e^x$, donc y_1 est solution si $(-ax + a - b)e^x = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x$, soit $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{2}$. On obtient donc $y_1(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 2y = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x}$ sous la forme $y_2(x) = (cx + d)e^{-x}$. On a alors $y_2'(x) = (-cx - d + c)e^{-x}$, et y_2 est solution si $(-3cx + c - 3d)e^{-x} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x}$, soit $c = -\dfrac{1}{3}$ et $d = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{18}$. On obtient donc $y_2(x) = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{18}$, ce dont on déduit la même solution particulière que ci-dessus (et bien sûr les mêmes solutions générales).

2. Comme il faut diviser par t pour mettre l'équation sous forme usuelle, la résolution s'effectuera sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. On a alors $y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{y}{t} = 0$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{\ln|t|} = \dfrac{K}{t}$, $K \in \mathbb{R}$ (on peut enlever la valeur absolue quitte à changer le signe de la constante sur $\mathbb{R}^{-*}$, on notera la constante du numérateur L sur ce deuxième intervalle).

   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{t}$, d'où on tire $\dfrac{K'(t)}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. Une solution particulière est donc la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$, et les solutions générales de l'équation sont de la forme $y(t) = \dfrac{\sin(t) + K}{t}$ (même formule avec un L au lieu du K sur l'autre intervalle, où le calcul reste valable à l'identique). Pour tenter de recoller les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut savoir que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ (c'est par exemple une conséquence du fait qu'il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, qui tend donc vers $(\sin)'(0) = \cos(0) = 1$). Il faut alors avoir $K = L = 0$ pour obtenir une fonction prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. En admettant que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est dérivable en 0 (elle y a en fait une dérivée nulle), on obtient donc une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Quelques courbes de solutions : en rouge pour $K = 0$ (donc la solution définie sur $\mathbb{R}$, en bleu $K = 1$, en vert $K = 2$, en rose $K = 5$ et en orange $K = -2$ (les valeurs négatives de K donnent des courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de celles obtenues pour les valeurs positives) :

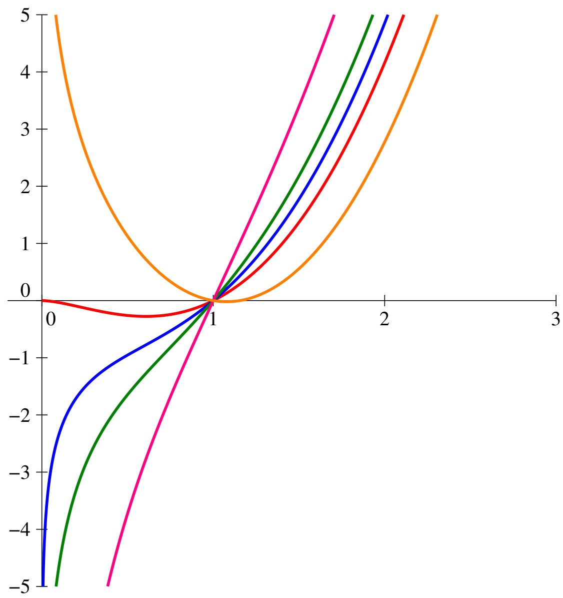


3. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-t}$, on recherche donc y_p sous la forme $K(t)e^{-t}$, ce qui nous donne $K'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{1 + e^t}$, soit $K'(t) = \dfrac{e^t}{1 + e^t}$. Le membre de droite étant de la forme $\dfrac{u'}{u}$, on peut prendre comme primitive $K(t) = \ln(1 + e^t)$. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto (\ln(1 + e^t) + K)e^{-t}$, $K \in \mathbb{R}$.

4. Pour les solutions de l'équation homogène, cf l'équation précédente. Plutôt que d'utiliser la méthode de variation de la constante (qui amène un calcul de primitive par intégration par parties peu agréable), nous allons directement chercher une solution de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. On a donc $y_p'(x) = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)e^{2x}$, et y_p est solution, en factorisant par e^{2x}, si et seulement si $3ax^2 + (2a + 3b)x + b + 3c = x^2 - 2x + 2$, soit $a = \dfrac{1}{3}$; $2a + 3b = -2$, donc $b = -\dfrac{8}{9}$; et enfin $b + 3c = 2$, donc $c = \dfrac{26}{27}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x} + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{8}{9}x + \dfrac{26}{27}\right) e^{2x}$.

5. Comme il faut diviser par $x \ln x$, on va résoudre sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ (l'équation ne peut pas avoir de sens ailleurs que sur $\mathbb{R}^{+*}$ à cause du ln). On obtient donc $y' + \dfrac{y}{x \ln x} = 3x \ln x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{\ln|\ln|x||} = K \ln x$ (à un

changement de constante près, cette formule est valable sur les deux intervalles de résolution). On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = K(x)\ln x$, donc $y_p'(x) = K'(x)\ln(x) + \dfrac{K(x)}{x}$. En reprenant l'équation, y_p est solution si $K'(x)\ln x = 3x\ln x$, on peut donc prendre $K(x) = \dfrac{3}{2}x^2$ et les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto \left(\dfrac{3}{2}x^2 + K\right)\ln x$. Toutes les solutions se prolongent en 1 en posant $y(1) = 0$. De plus, les solutions sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $y'(x) = 3x\ln(x) + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{K}{x}$, qui prend donc la valeur $\dfrac{3}{2} + K$ en 1. On obtient ainsi un recollement uniquement si la constante sur $]0,1[$ est la même que sur $]1,+\infty[$.
Des allures de courbes avec les mêmes conventions pour les couleurs que dans la deuxième équation ci-dessus :



6. Du classique, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-2x}$. On cherche directement une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On aura donc $y_p'(x) = 2ax + b$, et y_p sera solution si $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$, ce qui impose $a = \dfrac{1}{2}$; $2a + 2b = 0$ donc $b = -\dfrac{1}{2}$; et $b + 2c = 0$ donc $c = \dfrac{1}{4}$. On obtient $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + Ke^{-2x}$.

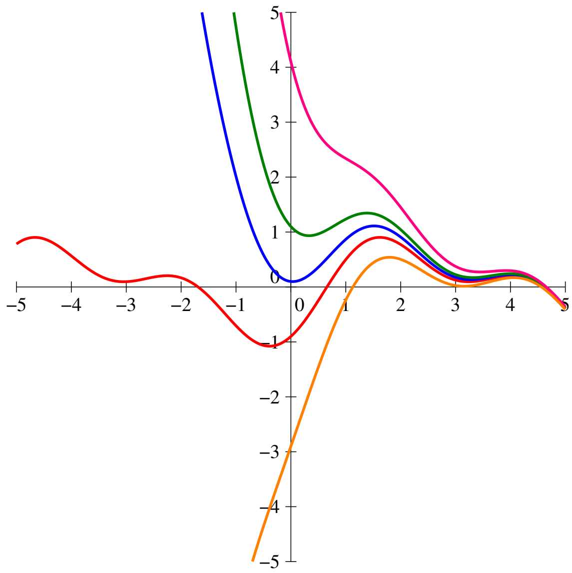
7. On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}}$. On ne cherche pas de solution particulière puisqu'il y en a une qui nous saute aux yeux : la fonction constante égale à -1. Les solutions générales sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. Si on veut de plus $y(0) = 0$, il faut avoir $K - 1 = 0$, donc $K = 1$. La solution unique au problème de Cauchy posé est donc la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^3}{3}} - 1$.

8. On ne peut résoudre que sur l'intervalle $]-1,1[$. L'équation homogène $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\arcsin x}$. Encore une fois, la fonction constante égale à -1 est une solution particulière donc les solutions générales sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\arcsin x} - 1$.

9. On résout sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. L'équation homogène associée $y' + \dfrac{y}{2t} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-\ln\left|\frac{t}{2}\right|} = \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$ (comme d'habitude, on change le nom de la

constante en L sur le deuxième intervalle de résolution). On cherche y_p sous la forme $\dfrac{K(t)}{\sqrt{|t|}}$, soit $y_p'(t) = \dfrac{K'(x)}{\sqrt{|t|}} - \dfrac{K(t)}{2t\sqrt{|t|}}$, et on obtient $\dfrac{K'(t)}{\sqrt{|t|}} = \dfrac{t^{n-1}}{2}$, donc $K'(t) = \dfrac{1}{2}|t|^{n-\frac{1}{2}}$. Finalement, $y_p(t) = \dfrac{t^n}{2n+1}$ convient (sur chacun des deux intervalles), et les solutions générales de l'équation sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1} + \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$. Si on souhaite recoller les morceaux en 0, seule la valeur $K = L = 0$ est possible, et la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1}$ est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

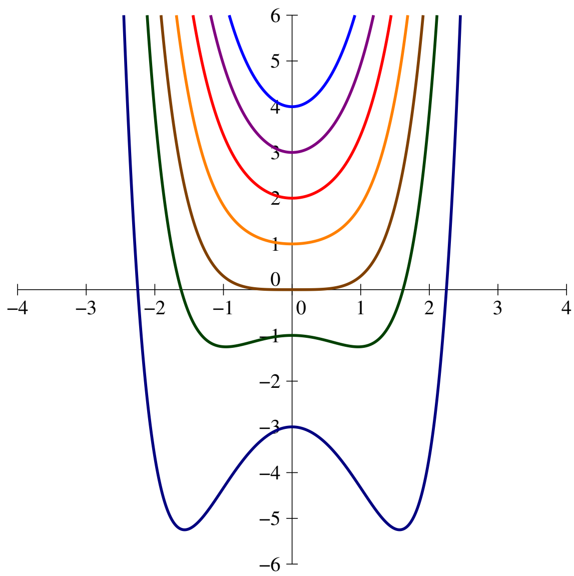
10. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$. On va ici utiliser le principe de superposition et commencer par chercher une solution à l'équation $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y_1(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. On a $y_1'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$, donc y_1 est solution si $(a+b)\cos(x) + (a-b)\sin(x) = \sin(x)$. Il suffit donc d'avoir $a + b = 0$ et $a - b = 1$, soit $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$, donc $y_1(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. De même, on cherche à trouver une solution de l'équation $y' + y = \sin(2x)$ sous la forme $y_2(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$, ce qui donne $y_2'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$. On obtient comme tout à l'heure un système, en l'occurence $a - 2b = 1$ et $b + 2a = 0$. Comme $b = -2a$, $5a = 1$ donc $a = \dfrac{1}{5}$, puis $b = -\dfrac{2}{5}$, et $y_2(x) = \dfrac{1}{5}\sin(2x) - \dfrac{2}{5}\cos(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin(x) - \dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(2x) - \dfrac{2}{5}\cos(2x) + Ke^{-x}$. Allez, ça fait un moment que je n'ai pas fait joujou avec des tracés de courbes colorées (comme d'habitude, la courbe rouge correspond à $K = 0$, c'est ici la seule solution périodique de l'équation) :



11. L'équation homogène associée a des solutions de la forme Ke^{3x}. On utilise ensuite le principe de superposition en cherchant d'abord une solution à l'équation $y' - 3y = x^2e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_1 est solution si $((a - 3a)x^2 + (2a + b - 3b)x + (b + c - 3c))e^x = x^2e^x$. Les conditions imposées sont $-2a = 1$, donc $a = -\dfrac{1}{2}$; $2a - 2b = 0$, donc $b = -\dfrac{1}{2}$; et $b - 2c = 0$, donc $b = -\dfrac{1}{4}$, ce qui donne $y_1(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 3y = xe^{3x}$ sous la forme $y_2(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$ (il faut prendre un polynôme du second degré car on

est dans le cas particulier où l'exponentielle est la même que celle de l'équation homogène). On a donc $y_2'(x) = (2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c)e^{3x}$, donc y_2 est solution si $((3a - 3a)x^2 + (2a + 3b - 3b)x + b + 3c - 3c)e^{3x} = xe^{3x}$. Les seules conditions sont donc $2a = 1$ et $b = 0$. On peut choisir $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$, et on en déduit que les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{3x}$. Comme $y(0) = -\frac{1}{4} + K$, la solution recherchée est celle obtenue pour $K = \frac{5}{4}$, soit $y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}\right)e^{3x}$.

12. La fonction ch ne s'annulant jamais, cette dernière équation peut se résoudre sur $\mathbb{R}$. Il faut trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ce quotient est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, il a donc pour primitive $\ln(e^x + e^{-x})$, ou encore (elles ne diffèrent que d'une constante) $\ln(\operatorname{ch}(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $y_h : x \mapsto K\operatorname{ch}(x)$, avec $K \in \mathbb{R}$. On va chercher une solution particulière à l'équation complète de la forme $y_p(x) = K(x)\operatorname{ch}(x)$, ce qui implique $y_p'(x) = K'(x)\operatorname{ch}(x) + K(x)\operatorname{sh}(x)$. La fonction est solution de l'équation si $K'(x)\operatorname{ch}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^3(x)}{\operatorname{ch}(x)}$, soit $K'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^3(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \dfrac{(\operatorname{ch}^2(x) - 1)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{sh}(x) - \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$. On en déduit qu'on peut prendre $K(x) = \operatorname{ch}(x) + \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$, soit $y_p(x) = \operatorname{ch}^2(x) + 1$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \operatorname{ch}^2(x) + 1 + K\operatorname{ch}(x)$. Une dernière série de courbes pour terminer en beauté l'exercice, de haut en bas les courbes correspondant à $K = 2$, $K = 1$, $K = 0$, $K = -1$, $K = -2$, $K = -3$ et $K = -5$:



Exercice 9 (***)

1. La normalisation de l'équation impose d'éliminer la valeur $x = 0$ (le facteur $1 + \ln^2(x)$ ne pose pas de problème puisqu'il est strictement positif). De plus, la présence de ln dans l'équation limite déjà la résolution à $\mathbb{R}^+$. On va donc résoudre notre équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Après normalisation, on cherche à résoudre l'équation $y' + \dfrac{2\ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} = \dfrac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{2\ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}$ étant continue sur $]0, +\infty[$, elle y admet nécessairement des primitives. Comme elle est de la forme $\dfrac{f'}{f}$, avec $f(x) = 1 + \ln^2(x)$ (qui a bien pour dérivée $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$), on peut prendre comme primitive la fonction $x \mapsto \ln(1 + \ln^2(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont alors toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{K}{1 + \ln^2(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3. On va donc chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{1 + \ln^2(x)}$, ce qui implique $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)(1 + \ln^2(x)) - \frac{2K(x)\ln(x)}{x}}{(1 + \ln^2(x))^2}$. La fonction est donc solution de (E) (en reprenant la forme initiale de l'équation) si $xK'(x) - \dfrac{2K(x)\ln(x)}{1 + \ln^2(x)} + \dfrac{2\ln(x)K(x)}{1 + \ln^2(x)} = 1$, donc si $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. On peut choisir $K(x) = \ln(x)$, ce qui revient à dire que $y_p(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 + \ln^2(x)}$.

4. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = \dfrac{\ln(x) + K}{1 + \ln^2(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

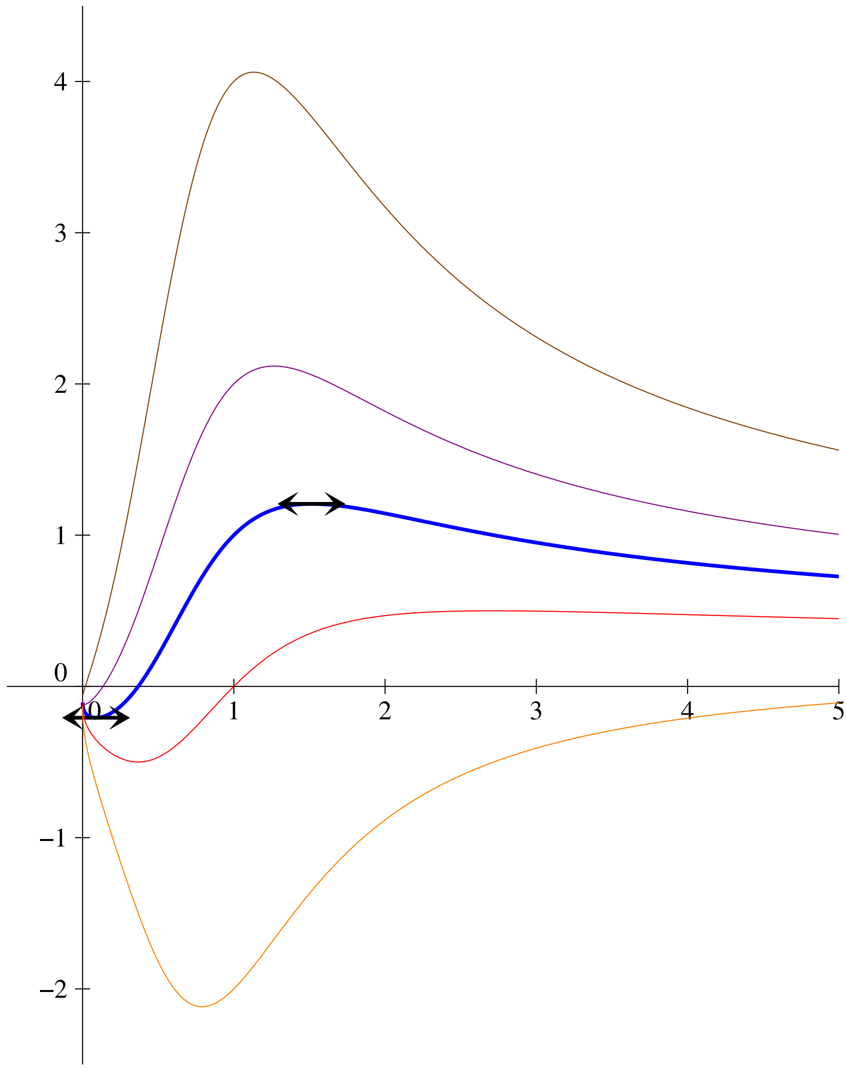
5. En factorisant numérateur et dénominateur par $\ln(x)$, on peut écrire $y(x) = \dfrac{1 + \frac{K}{\ln(x)}}{\ln(x) + \frac{1}{\ln(x)}}$ et il n'y a plus de forme indéterminée : indépendamment de la valeur de K, on a toujours $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

6. La condition initiale impose $K = 1$, donc $y(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{1 + \ln^2(x)}$. On notera f cette fonction pour l'étude de la dernière question.

7. Les limites de f ont déjà été calculée plus haut. De plus, f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\frac{1+\ln^2(x)}{x} - \frac{2\ln^2(x)}{x} + \frac{2\ln(x)}{x}}{(1 + \ln^2(x))^2} = \dfrac{1 - 2\ln(x) - \ln^2(x)}{x(1 + \ln^2(x))^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2\ln(x) - \ln^2(x)$. En posant $X = \ln(x)$, on obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 8$, admettant pour racines $X_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{-2} = \sqrt{2} - 1$ et $X_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$. La dérivée s'annule donc lorsque $x = e^{\sqrt{2}-1}$ et $x = e^{-1-\sqrt{2}}$, et sera positive entre ces deux valeurs. On peut calculer $f(e^{\sqrt{2}-1}) = \dfrac{\sqrt{2} - 1 + 1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$. De même, $f(e^{-\sqrt{2}-1}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$. On peut aussi calculer facilement les valeurs $f(e) = \dfrac{1 + 1}{1 + 1} = 1$, $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ et $f(1) = 1$ si on le souhaite. Voici le tableau de variations de la fonction :

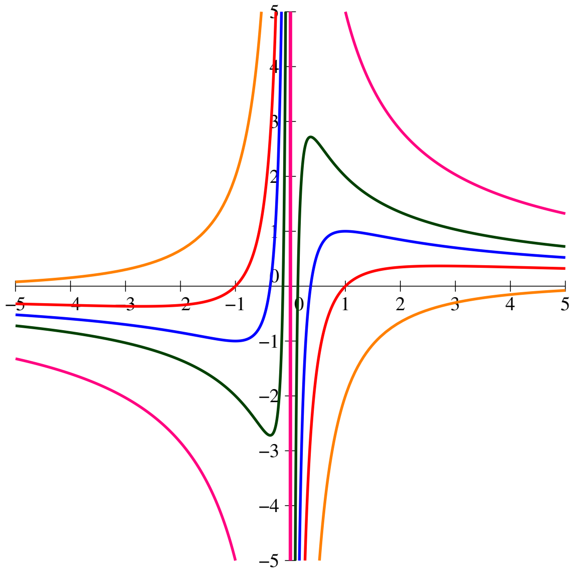
x	0		$e^{-\sqrt{2}-1}$		$e^{\sqrt{2}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	0

Une allure de courbe, en bleu sur la figure. On a tracé dans d'autres couleurs les allures d'autres courbes intégrales associées à cette équation, ce qui n'était pas demandé dans l'énoncé ($K = 0$ en rouge, $K = -2$ en orange, $K = 2$ en violet et $K = 4$ en marron) :



Exercice 10 (*)

Sur les intervalles précisés, aucun problème : l'équation homogène $y' + \frac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto e^{-\ln|x|} = \frac{K}{x}$ (quitte à changer le signe de K et à l'appeler L sur $\mathbb{R}^{-*}$), et on cherche y_p sous la forme $\frac{K(x)}{x}$. On obtient $y_p'(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, d'où la condition $\frac{xK'(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, on peut prendre $K(x) = \ln|x|$, donc les solutions générales sont de la forme $y(x) = \frac{K + \ln|x|}{x}$ (même formule avec un L au lieu de K sur le deuxième intervalle). Ces fonctions ne sont jamais prolongeables par continuité en 0, il n'y a donc pas de solution définie sur $\mathbb{R}$. Une allure de quelques courbes intégrales de cette équation (comme dans l'exercice précédent, rouge pour $K = 0$, bleu pour 1, vert pour 2, rose pour 5 et orange pour -2) :



Exercice 11 (**)

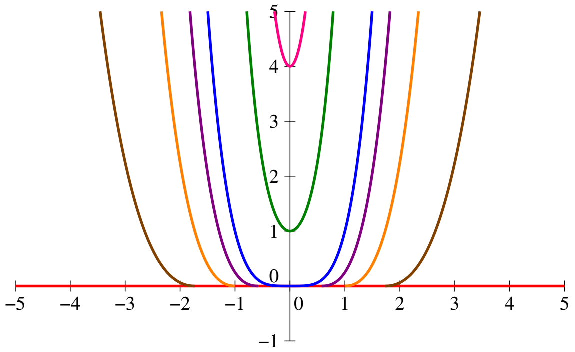
Toutes les solutions sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, puisque le membre de droite de l'équation est dérivable. On peut par ailleurs écrire l'équation $f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$, et dériver pour obtenir $f'(x) = \cos(x) + 2e^x \times e^{-x} f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$. En reprenantr l'équation initiale, on a donc $f'(x) = \cos(x) + 2f(x) + (f(x) - \sin(x))$, soit $f'(x) - 3f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. On est retombé sur une équation linéaire du premier ordre qu'on sait résoudre. L'équation homogène a pour solutions $y_h : x \mapsto Ke^{3x}$, et on peut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$, ce qui donne $y_p'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$. La fonction y_p est donc solution si $(a - 3b)\cos(x) - (b + 3a)\sin(x) = \cos(x) - \sin(x)$, ce qui fonctionne si $a - 3b = 1$ et $b + 3a = 1$, soit $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{2}{5}$. On peut donc prendre $y_p(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$, ce qui donne comme solutions de l'équation complète les fonctions $f(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + Ke^{3x}$. Le travail n'est pas fini car on a obtenu simplement les fonctions f dont la dérivée vérifie une condition nécessaire pour être solutions du problème initial. Il faut donc vérifier par exemple que $f(0)$ prend la valeur donnée par l'équation initiale pour que nos solutions soient valables. Ici, on doit avoir $f(0) = \sin(0) + \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt = 0$, donc $K + \frac{2}{5} = 0$. Cela impose la valeur $K = -\frac{2}{5}$, soit $f(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{3x}$. On vérifie si on le souhaite que cette fonction est effectivement solution, et c'est donc la seule.

Exercice 12 (**)

Posons donc $z = \sqrt{y}$ (ce qui est possible car y doit être à valeurs positives pour satisfaire l'équation), on a alors $y = z^2$, donc $y' = 2zz'$, d'où $2(1 + t^2)zz' = 4tz^2 + 4tz$. On doit donc avoir, pour les points où z ne s'annule pas, $2(1 + t^2)z' - 4tz = 4t$. Il y a une solution particulière évidente à cette équation qui est la fonction constante égale à -1, et l'équation homogène associée $z' - \frac{2t}{1 + t^2} z = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{\ln(1+t^2)} = K(1 + t^2)$, donc on obtient $z(t) = K(1 + t^2) - 1$, et (quand cela est possible) $y(t) = (K(1 + t^2) - 1)^2$. Mais il faut absolument s'intéresser au signe des fonctions obtenues, puisque z ne peut pas prendre de valeurs négatives quand on a posé $z = \sqrt{y}$, et que même les valeurs d'annulation de z vont poser problème. Si

$K \leqslant 0$, la fonction z est toujours négative, on peut oublier ce cas dans le cadre de notre problème. Au contraire, si $K > 1$, la fonction z est toujours strictement positive et la fonction y correspondante est donc solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier. Enfin, on constate que $z(t) = 0$ si $t^2 = \dfrac{1-K}{K}$, ce qui produit pour deux valeurs opposées de t lorsque $K \in]0,1[$. Dans le cas particulier $K = 1$, où $z(t) = t^2$ et donc $y(t) = t^4$, la fonction z s'annule une seule fois pour $t = 0$, et y est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier (on le vérifie facilement, la dérivée en 0 étant nulle). Si $0 < K < 1$, z et y s'annulent pour $x = \pm\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}$, et l'équation initiale devient pour les valeurs où y s'annule $(1+t^2)y' = 0$, donc la dérivée de y doit s'annuler à ces endroits pour que la fonction y reste solution. Or, $y'(t) = 2z(t)z'(t)$ s'annule toujours aux endroits où y s'annule. Les solutions sont donc en fait tout à fait valables sur les intervalles où z est positive, donc sur $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}, +\infty\right[$. On peut en fait obtenir d'autres solutions définies sur $\mathbb{R}$ en recollant ces morceaux avec la fonction nulle, qui est trivialement solution de l'équation (la dérivée des solutions étant toutjours nulle aux endroits où ces solutions s'annullent, on obtiendra bien des fonctions dérivables) : on prend $y(t) = (K(1+t^2)-1)^2$ sur l'intervalle $-\infty, \left[\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}\right[$ puis $y(t) = 0$ sur $\left[-\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}, \sqrt{\dfrac{1-L}{L}}\right]$, et enfin $y(t) = (L(1+t^2)-1)^2$ sur $\left[\sqrt{\dfrac{1-L}{L}}, +\infty\right[$. Ceci fonctionne quelles que soient les valeurs de K et de L strictement comprises entre 0 et 1.

Regardons tout cela sur un petit graphique. En rouge la solution nulle, en bleu la solution correspondant à $K = 1$ (celle qui s'annule uniquement en 0), en vert $K = 2$, en rose $K = 3$ (solutions ne s'annulant pas) ; en orange $K = \dfrac{1}{2}$, en marron $K = \dfrac{1}{4}$ et en violet $K = \dfrac{3}{4}$. On peut ainsi, comme décrit plus haut, construire une solution sur $\mathbb{R}$ en prenant le morceau de gauche de la courbe marron (jusqu'à la valeur d'annulation négative), en mettant un petit bout de solution rouge (donc égale à 0), et on finit avec le morceau de droite de la courbe orange.



Exercice 13 (**)

Posons donc $z = \dfrac{1}{y}$, on a alors $y = \dfrac{1}{z}$, donc $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$, ce qui nous donne l'équation $-\dfrac{3z'}{z^2} + \dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{z^2} = 0$, soit en mettant tout au même dénominateur et en simplifiant par z : $3z' - 3z = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^t, et la fonction constante égale à $-\dfrac{1}{3}$ est solution particulière évidente, donc $z(t) = Ke^t - \dfrac{1}{3}$. Ces fonctions ne s'annulent pas lorsque $K \leqslant 0$ (elles sont alors toujours négatives), ce qui donne des solutions définies sur $\mathbb{R}$ pour l'équation initiale de la forme $y(t) = \dfrac{1}{Ke^t - \frac{1}{3}}$, où $K \in \mathbb{R}^-$. On pourrait s'intéresser au recollement des solutions qui s'annulent avec la solution nulle, mais comme ce n'est pas demandé, pourquoi se fatiguer ?

Exercice 14 (**)

En posant $u = \dfrac{y'}{y}$, on a $u' = \dfrac{y''y - y'^2}{y^2}$, donc l'équation devient $y^2(u'\sin^2(x) + 1) = 0$. La fonction y n'ayant pas trop le droit de s'annuler pour que notre changement de variable soit valable, on a $u'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$, donc $u(x) = \dfrac{1}{\tan x} + K$ (vous pouvez ajouer cette primitive à votre tableau de primitives usuelles si vous le souhaitez). Revenons à notre changement de variable : $y' - uy = 0$, donc $y' - \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + K\right) y = 0$. L'équation est homogène, il suffit de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + K$, on peut prendre $\ln|\sin(x)| + Kx$, et obtenir ainsi pour solutions de l'équation initiale les fonctions $y(x) = L|\sin(x)|e^{-Kx}$. Les plus courageux pourront se demander s'il y a des recollements possibles entre différentes valeurs des constantes K et L.

Exercice 15 (*)

On devrait reconnaitre que la fonction y est la fonction tangente. Par la méthode d'Euler avec pas $\dfrac{1}{4}$, on a $y'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$, donc $y\left(\dfrac{1}{4}\right) \simeq \dfrac{1}{4}$, puis $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) \simeq \dfrac{17}{16}$ etc. En fait, en notant $u_k = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, en prenant comme pas $\dfrac{1}{n}$, on a $u_{k+1} = \dfrac{1}{n}(u_k^2 + 1) + u_k$ (c'est une conséquence de la forme de l'équation différentielle). Pour $n = 4$, on a donc $u_1 = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \dfrac{17}{16}$, $u_4 \simeq 1.255$. Pour $n = 10$, on a $u_1 = \dfrac{1}{10}$, $u_2 = \dfrac{201}{1000}$ puis $u_{10} \simeq 1.396$. Sachant que $\tan 1 \simeq 1.557$, les approximations ne sont pas vraiment extrêmement satisfaisantes.

Exercice 16 (* à ***)

1. L'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ ayant pour solution $2i$ et $-2i$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto A\cos(2t) + B\sin(2t)$. On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, on a donc $y_p'' = 2a$, et y_p est solution si $4ax^2 + 4bx + 4c + 2a = x^2 - x + 1$, soit $a = \dfrac{1}{4}$, $4b = -1$ donc $b = -\dfrac{1}{4}$, et $4c + 2a = 1$ donc $c = \dfrac{1}{8}$. On obtient finalement comme solutions de l'équation complète les fonctions $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}$.

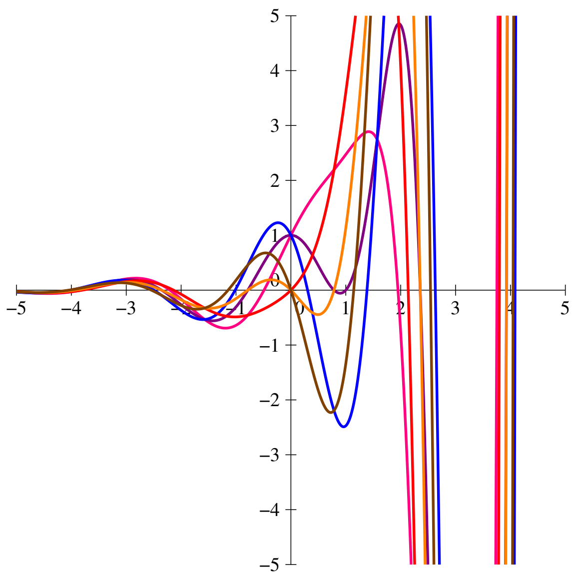
2. L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ a pour solution 0 et 1, les solutions homogènes sont donc de la forme $y(x) = A + Be^{-x}$ (c'est une fausse équation du second ordre, on a en fait une équation du premier ordre en y'), il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x$, et $y_p''(x) = (ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c))e^x$. Cette fonction est solution si, après simplification par e^x, $2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c = 4x^2$, ce qui nous donne $a = 2$, $6a + 2b = 0$ donc $b = -6$, et $2a + 3b + 2c = 0$ donc $c = 7$. On a donc des solutions générales de la forme $y(x) = A + Be^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$. Si on impose de plus $y(0) = A + B + 7 = e$ et $y'(0) = -B + 1 = 0$, on obtient $B = 1$ et $A = e - 8$, et la solution est bien unique.

3. L'équation homogène a pour équation caractéristique $r^2 + r + 2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 8 = -7$, et les solutions $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$, et $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$. Les solutions sont donc de la forme $y_h(x) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$. Pour la solution particulière, on va chercher sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$ et $y_p''(x) = (ax+2a+b)e^x$, qui est solution si $4ax+3a+4b = 8x+1$, soit $a = 2$ et $b = -\frac{5}{4}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}} + \left(2x - \frac{5}{4}\right)e^x$.

4. Ici, l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour solution -1 et 1, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$. Pour la solution particulière, utilisons le principe de superposition : comme $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$, on va chercher une solution particulière avec second membre $\frac{e^x}{2}$, puis $\frac{e^{-x}}{2}$. Dans les deux cas, l'exposant de l'exponentielle est racine de l'équation caractéristique, il faut donc prendre un polynome de degré 1 en facteur. Posons donc $y_1(x) = (ax+b)e^x$, on a $y_1''(x) = (ax+2a+b)e^x$, et y_1 est solution pour $\frac{e^x}{2}$ si $a = \frac{1}{4}$ (et on prend par exemple $b = 0$) donc $y_1(x) = \frac{1}{4}xe^x$. De même, on obtient $y_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$, donc en faisant la différence des deux, une solution particulière de l'équation complète est $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}x\,\mathrm{ch}(x)$. Finalement, nos solutions de l'équation complète sont les fonctions $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}x\,\mathrm{ch}(x)$.

5. L'équation caractéristique a pour racines évidentes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ae^t + Be^{2t}$. Il faut chercher y_p de la forme $(at^3 + bt^2 + ct + d)e^t$ (un peu de courage !), donc $y_p'(t) = (at^3 + (3a+b)t^2 + (2b+c)t + c + d)e^t$ et $y_p''(t) = at^3 + (6a+b)t^2 + (6a+4b+c)t + 2b + 2c + d)e^t$. Cette fonction est solution si $(a-3a+2a)t^3 + (6a+b-9a-3b+2b)t^2 + (6a+4b+c-6b-3c+2c)t + 2b+2c+d-3c-3d+2d = -3t^2+10t-7$, soit $-3at^2 + (6a-2b)t + 2b - c = -3t^2+10t-7$. On obtient $a = 1$, $6a - 2b = 10$ donc $b = -2$, et $2b - c = -7$ donc $c = 3$. Les solutions de l'équation complète sont de la forme $y(t) = (t^3 - 2t^2 + 3t + A)e^t + Be^{2t}$.

6. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 5$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = (4i)^2$ et pour racines $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto (A\cos(2t) + B\sin(2t))e^t$. Pour la solution particulière, on va en chercher une de l'équation complexe $y'' - 2y' + 5y = 4e^te^{2it} = 4e^{(1+2i)t}$ sous la forme $y_c(t) = (at+b)e^{(1+2i)t}$. On a donc $y_c'(t) = ((a+2ia)t + b + 2ib + a)e^{(1+2i)t}$ et $y_c''(t) = ((a+4ia-4a)t + b + 2ib + a + 2ib - 4b + 2ia + a + 2ia)e^{(1+2i)t}$. On a une solution si $(a + 4ia - 4a - 2a - 4ia + 5a)t - 3b + 4ib + 2a + 4ia - 2b - 4ib - 2a + 5b = 4$, soit $a = -i$ (quelle simplification spectaculaire !), donc une solution particulière est la fonction $y_c(t) = -ite^{(1+2i)t} = -ie^t(\cos(2t) + \sin(2t))$. Pour obtenir une solution particulière y_p de notre équation initiale, il suffit de prendre la partie imaginaire de la précédente : $y_p(t) = -t\cos(2t)e^t$. On obtient finalement pour solutions de l'équation complète les fonctions de la forme $y(t) = ((A-t)\cos(2t) + B\sin(2t))e^t$. Je ne donne qu'un exemple de courbes intégrales pour cette dernière équation, avec deux constantes qui peuvent varier indépendemment, c'est beaucoup moins intéressant que dans le cas des équations du premier ordre, mais ça donne une vague idée des allures possibles (ici les six courbes possibles en donnant aux deux constantes les valeurs 0 et 1 pour A, et -1, 0 et 1 pour B ; avec plus de courbes ça devient illisible) :



Exercice 17 (**)

On pose donc $y(x) = z(\ln(x))$ (puisqu'on cherche des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est toujours possible), d'où $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$ et $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. L'équation devient alors $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = \dfrac{1}{x^2}$, soit en posant $t = \ln(x)$, $z'' + 2z' + z = e^{-2t}$. L'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour racine double -1, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $z_h(t) = (A + Bt)e^{-t}$, et une solution particulière sera de la forme Ke^{-2t}, avec $4K - 4K + K = 1$, donc $K = 1$ convient, soit $z_p(t) = e^{-2t}$. On a donc comme solutions générales les fonctions $z(t) = (A + Bt)e^{-t} + e^{-2t}$, d'où on tire en remplaçant t par $\ln(x)$, $y(x) = \dfrac{A + B\ln x}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. En imposant $y(1) = y'(1) = 0$, on a $A + 1 = -A + B - 2 = 0$, d'où $A = -1$ et $B = 1$. La seule fonction solution de ce problème est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln x - x + 1}{x^2}$.

Exercice 18 (***)

1. On peut normaliser cette équation linéaire du premier ordre pour la mettre sous la forme $y' - \dfrac{2}{x}y = 1$. La fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est définie et continue sur I donc y admet des primitives. L'une d'elles étant $x \mapsto -2\ln(x)$, les solutions de l'équation homogène associée à l'équation qu'on nous demande de résoudre sont de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{2\ln(x)} = Kx^2$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   Reste à trouver une solution particulière de l'équation, qu'on va chercher sous la forme $y_p : x \mapsto K(x)x^2$ (méthode de variation de la constante). On aura donc $y_p'(x) = K'(x)x^2 + 2xK(x)$, et y_p sera solution de notre équation complète si et seulement si $K'(x)x^2 + 2xK(x) - 2K(x)x = 1$, c'est-à-dire si $K'(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On peut donc choisir $K(x) = -\dfrac{1}{x}$, ce qui revient à dire que $y_p(x) = -x$. Toutes les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto Kx^2 - x$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   Étudions le signe de ces solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$: si $K \leqslant 0$, pas grand chose à signaler, la fonction y est tout le temps négative (et en particulier n'est pas toujours strictement positive puisqu'elle ne l'est jamais !). Si $K > 0$, la fonction est continue et s'annule lorsque $Kx^2 - x = 0$, donc pour $x = \dfrac{1}{K}$ (qui appartient bien à I puisqu'on a supposé $K > 0$). La fonction est alors

négative sur $\left]0, \dfrac{1}{K}\right]$, et donc pas non plus strictement positive sur I.

2. On utilise bien sûr la même méthode qu'à la question précédente : la normalisation donne cette fois l'équation équivalente $y' + \dfrac{2}{x} y = 1$, et les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto Le^{-2\ln(x)} = \dfrac{L}{x^2}$, avec $L \in \mathbb{R}$. On cherche à nouveau une solution particulière via variation de la constante : $y_p(x) = \dfrac{L(x)}{x^2}$, donc $y_p'(x) = \dfrac{x^2 L'(x) - 2xL(x)}{x^4} = \dfrac{xL'(x) - 2L(x)}{x^3}$, et y_p est solution de notre équation complète si $\dfrac{xL'(x) - 2L(x)}{x^3} + \dfrac{2L(x)}{x^3} = 1$, soit $\dfrac{L'(x)}{x^2} = 1$. On doit donc avoir $L'(x) = x^2$, ce qui sera le cas en prenant par exemple $L(x) = \dfrac{x^3}{3}$, ce qui donne $y_p(x) = \dfrac{x}{3}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto \dfrac{L}{x^2} + \dfrac{x}{3}$, avec $L \in \mathbb{R}$.
   Ces fonctions sont toujours positives sur I si $L \geqslant 0$, et dans le cas où $L < 0$, elles s'annulent lorsque $\sqrt[3]{-3L}$ (nombre qui est bien positif) et sont positives après avoir passé cette valeur. En particulier, aucune solution de l'équation n'est toujours strictement négative (une autre façon de prouver les choses est de constater que toutes ces solutions ont une limite égale à $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est difficilement possible pour une fonction strictement négative).

3. (a) Puisque y_0 est solution de l'équation (E), elle vérifie $y_0' - \dfrac{2}{x}|y_0| = 1$, ou encore $y_0' = \dfrac{2}{x}|y_0| + 1$. Autrement dit, on a a toujours $y_0' \geqslant 1$ sur l'intervalle I, ce qui suffit évidemment à assurer la stricte croissance de y_0.

   (b) Supposons donc que y_0 soit toujours de même signe sur l'intervalle I. Si elle est toujours strictement positive sur I, alors on a toujours $|y_0| = y_0$, et y_0 est donc solution sur I de l'équation $xy' - 2y = 1$, tout en étant toujours strictement positive. C'est impossible d'après la question 1. De même, si y_0 était strictement négative sur tout l'intervalle I, elle serait solution sur tout cet intervalle de l'équation $xy' + 2y = 1$ tout en étant strictement négative, ce qui est impossible d'après la question 2. La fonction y_0 s'annule donc nécessairement sur l'intervalle I.

   (c) La fonction y_0 étant strictement croissante et continue sur I, elle est bijective de I vers un intervalle contenant 0 (puisque la question précédente a prouvé que y_0 s'annulait nécessairement sur I). L'équation $y_0(x) = 0$ ne peut donc avoir qu'une seule solution.

   (d) La fonction y_0 étant strictement croissante, elle sera négative sur l'intervalle $]0, x_0[$. Elle est donc solution sur cet intervalle de l'équation $xy' + 2y = x$, et donc de la forme $y_0(x) = \dfrac{L}{x^2} + \dfrac{x}{3}$ sur cet intervalle (qui est inclus dans l'intervalle I). Comme elle doit par ailleurs vérifier $y_0(x_0) = 0$, on doit avoir $\dfrac{L}{x_0^2} + \dfrac{x_0}{3} = 0$, soit $L = -\dfrac{x_0^3}{3}$ (l'expression de la fonction reste valable pour $x = x_0$ par continuité de la fonction y_0). Autrement dit, sur l'intervalle $]0, x_0[$, on aura $y_0(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{x_0^3}{3x^2} = \dfrac{x^3 - x_0^3}{3x^2}$. On procède de même sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$: la fonction y_0 y est positive donc solution de l'équation $xy' - 2y = x$, et donc de la forme $y_0(x) = Kx^2 - x$. L'annulation de la fonction en x_0 impose $K = \dfrac{1}{x_0}$ et donne donc la formule attendue $y_0(x) = \dfrac{x^2}{x_0} - x$.

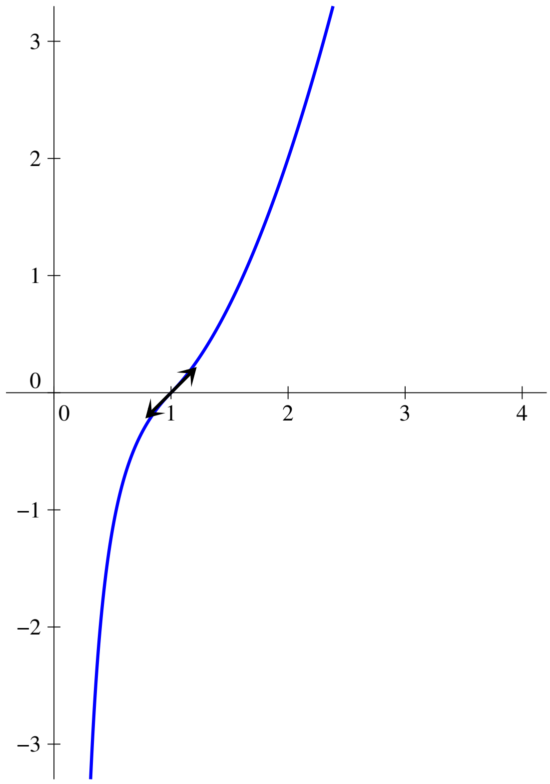
4. (a) Par définition, $y_0(1) = 0$, donc en remplaçant x par 1 dans l'équation (E) on doit avoir $y'(1) = 1$. On peut bien sûr aussi reprendre les deux expressions obtenues à la question

précédente : sur $]0,1]$, on a $y_0(x) = \dfrac{x^3-1}{3x^2}$, donc $y_0'(x) = \dfrac{9x^4 - 6x(x^3-1)}{9x^4} = \dfrac{x^3+2}{3x^3}$, dont on déduit que la dérivée à gauche de la fonction y_0 en 1 vaut 1 (attention, l'expression n'étant valable que sur un intervalle dont 1 est la borne supérieure, on ne peut rien en déduire pour l'instant sur ce qui se passera à droite de 1, et donc sur la dérivabilité de y_0 en 1). De même, sur $[1,+\infty[$, $y_0(x) = x^2 - x$, donc $y_0'(x) = 2x - 1$, ce qui donne une dérivée à droite en 1 égale à 1. Les dérivées à gauche et à droite de y_0 en 1 étant égales, la fonction y_0 est bien dérivable en 1, et $y_0'(1) = 1$.

(b) En utilisant les expressions rappelées à la question précédente, on calcule sans aucune difficulté $\lim\limits_{x\to 0} y_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty$. De plus, on a, sur l'intervalle $[1,+\infty[$, $\dfrac{y_0(x)}{x} = x - 1$, ce qui implique évidemment que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y_0(x)}{x} = +\infty$ (ce dernier calcul de limite prouve techniquement que la courbe représentative qu'on tracera un peu plus loin ne peut pas avoir d'asymptote oblique en $+\infty$, car la fonction y_0 croît plus vite que n'importe quelle fonction affine, on parle techniquement de branche parabolique de direction (Oy), mais ce genre d'étude n'est pas à votre programme).

(c) On peut bien sûr partir des expressions obtenues plus haut pour y_0' sur chaque intervalle : sur $]0,1[$, $y_0'(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3x^3}$, donc $y_0''(x) = -\dfrac{2}{x^4}$, expression qui est bien entendue strictement négative sur tout l'intervalle $]0,1[$. Sur $]1,+\infty[$, on aura cette fois $y_0'(x) = 2x - 1$, donc tout simplement $y_0''(x) = 2$, ce qui est strictement positif. Remarquons en passant que la fonction y_0 n'est pas dérivable deux fois sur tout l'intervalle I, car les limites distinctes de y_0'' à gauche et à droite quand x tend vers 1 empêchent y_0' d'être dérivable en 1.

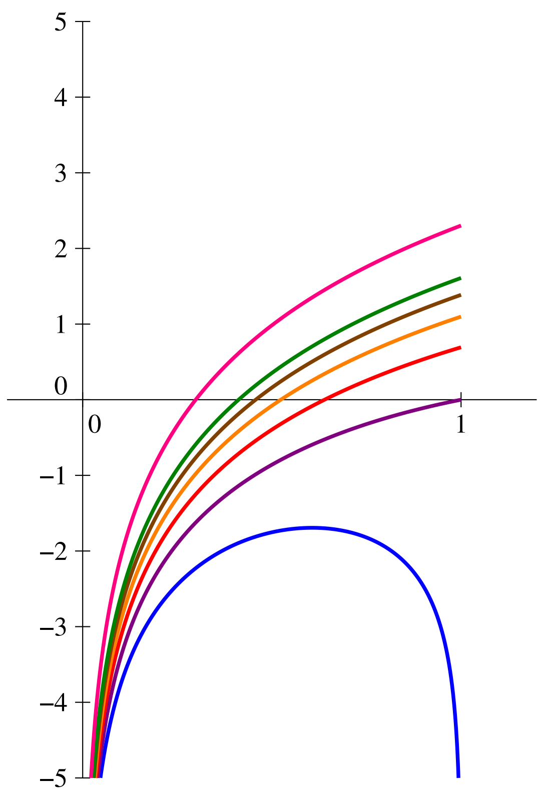
(d) Voici une allure de courbe, avec la tangente de pente 1 au point d'annulation :



Exercice 19 (**)

1. Faisons donc ce que l'énoncé nous conseille, en posant $y(t) = z(t)e^{-t^2}$ (on peut toujours puisque e^{-t^2} ne s'annule jamais), on a alors $y'(t) = (z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2}$, puis $y''(t) = (z''(t) - 2z(t) - 2tz'(t))e^{-t^2} - 2t(z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2} = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$. L'équation initiale devient alors, en supprimant le e^{-t^2} en facteur de tous les termes (et qui ne s'annule jamais), $z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2z + (11 + 4t^2)z = 0$, soit $z'' + 9z = 0$. Voilà une équation plus sympathique, dont l'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ a pour solutions $3i$ et $-3i$. Les solutions sont donc de la forme $A\cos(3t) + B\sin(3t)$, dont on déduit les solutions de l'équation initiale : $y(t) = (A\cos(3t) + B\sin(3t))e^{-t^2}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. On peut toujours poser $z(x) = e^{y(x)}$, ce qui donnera une fonction toujours dérivable. Bien sûr, comme $y(x) = \ln(z(x))$, on aura $y'(x) = \dfrac{z'(x)}{z(x)}$, et on introduit cette dérivée dans l'équation initiale pour la transformer en $xz'(x) - 2z(x) = -x^2$, ou encore après normalisation $z'(x) - \dfrac{2}{x}z(x) = -x$. On reconnait une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $z_h : x \mapsto Ke^{2\ln(x)} = Kx^2$, avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x) = K(x)x^2$ (variation de la constante), ce qui implique $z'(x) = K'(x)x^2 + 2xK(x)$. La fonction z_p est donc solution si $x^3K'(x) + 2x^2K(x) - 2x^2K(x) = -x^2$, soit $K'(x) = -\dfrac{1}{x}$. On peut donc prendre $K(x) = -\ln(x)$, soit $z_p(x) = -x^2\ln(x)$. Les solutions de cette équation sont donc toutes les fonctions de la forme $z : x \mapsto x^2(K - \ln(x))$, avec $K \in \mathbb{R}$. Les fonctions z sont toujours strictement positives sur $]0, 1[$ lorsque $K \geqslant 0$, par contre elles s'annulent quand $\ln(x) = K$, donc $x = e^K$, lorsque $K < 0$. Les fonctions y solutions de l'équation initiale sur tout l'intervalle $]0, 1[$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(x^2(K - \ln(x))) = 2\ln(x) + \ln(K - \ln(x))$, avec $K \in [0, +\infty[$. Ci-dessous, quelques courbes intégrales correspondant à ces solutions ($K = 0$ en bleu, $K = 1$ en violet, $K = 2$ en rouge, $K = 3$ en orange, $K = 4$ en marron, $K = 5$ en vert, $K = 10$ en rose) :



3. Posons donc $z(x) = xy(x)$, ou plutôt $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$, ce qu'on peut faire sans difficulté sur l'intervalle de résolution imposé. On calcule alors $y'(x) = \dfrac{xz'(x) - z(x)}{x^2} = \dfrac{z'(x)}{x} - \dfrac{z(x)}{x^2}$, puis $y''(x) = \dfrac{x^2(z'(x) + xz''(x) - z'(x)) - 2x(xz'(x) - z(x))}{x^4} = \dfrac{z''(x)}{x} - \dfrac{2z'(x)}{x^2} + \dfrac{2z(x)}{x^3}$. On reporte tout ça dans notre équation : $z''(x) - \dfrac{2z'(x)}{x} + \dfrac{2z(x)}{x^2} + \dfrac{(2x+1)z'(x)}{x} - \dfrac{(2x+1)z(x)}{x^2} + \dfrac{(x+2)z(x)}{x} = 0$, soit $z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 0$ après des simplifications particulièrement sympathiques. L'équation différentielle du second ordre obtenue est à coefficients constants, elle a pour équation caractéristique $r^2+2r+1 = 0$, qui admet une unique racine double $r = -1$. Ses solutions sont donc les fonctions de la forme $z : x \mapsto (Ax+B)e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Aucun problème pour remonter le changement d'inconnue ici, les solutions de l'équation initiale sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \left(A + \dfrac{B}{x}\right) e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4. Encore une fois, le changement proposé ne pose aucun problème sur l'intervalle choisi. On aura donc $y(t) = tz(t)$, puis $y'(t) = z(t) + tz'(t)$, et $y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$. On met tout ça dans l'équation : $2t^2z' + t^3z'' - 2tz - 2t^2z' + 2tz - t^3z = 0$, soit $z'' - z = 0$ après simplification des t^3 qui ne s'annulent pas sur $]0, +\infty[$. Même pas besoin de calculs pour résoudre cette dernière équation : $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, donc $y(t) = Ate^t + Bte^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

5. Comme on ne peut pas exprimer directement y en fonctions de z pour celle-ci, il va falloir ruser un peu pour remplacer dans l'équation initiale en ne faisant apparaitre que l'inconnue z. Le membre de droite ne va évidemment poser aucun problème puisqu'il est simplement égal à $z(x)$. Reste donc à exprimer $x^3y''(x)$ uniquement en fonction de z et de ses dérivées. Pour cela partons de $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{z(x)}{x}$ et dérivons : $y''(x) = \dfrac{xy'(x) - y(x)}{x^2} - \dfrac{xz'(x) - z(x)}{x^2} = -\dfrac{z'(x)}{x^2}$ puisque le numérateur de la première fraction est simplement égal à $-z(x)$. Finalement, $x^3y''(x) = -x^2z'(x)$, et l'équation initiale se transforme en $-x^2z' = z$, soit en normalisant $z' + \dfrac{1}{x^2}z = 0$. On a sous les yeux une équation homogène linéaire du premier ordre, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et y admet pour primitive $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme $z : x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

   On est loin d'en avoir terminé avec les calculs, on sait maintenant que $y - xy' = Ke^{\frac{1}{x}}$, soit $y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{K}{x}e^{\frac{1}{x}}$. Cette nouvelle équation linéaire du premier ordre a pour solutions de l'équation homogène associée les fonctions $y_h : x \mapsto Le^{\ln(x)} = Lx$, avec $L \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = xL(x)$ (variation de la constante), ce qui donne $y_p'(x) = L(x) + xL'(x)$, la fonction y_p est donc solution de l'équation complète si $xL'(x) = -\dfrac{K}{x}e^{\frac{1}{x}}$, donc $L'(x) = -\dfrac{K}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Coup de chance, on reconnait une dérivée de composée de façon évidente, on peut donc prendre $L(x) = Ke^{\frac{1}{x}}$, soit $y_p(x) = Kxe^{\frac{1}{x}}$. Il ne reste plus qu'à conclure : les fonctions solutions de l'équation initiale sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Lx + Kxe^{\frac{1}{x}}$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.

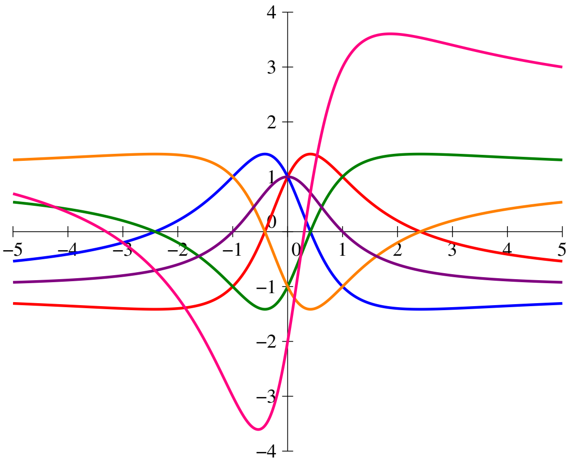
Exercice 20 (***)

1. Posons donc $y(x) = z(t) = z\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et dérivons deux fois pour obtenir $y'(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'\left(\dfrac{1}{x}\right)$, puis $y''(x) = \dfrac{2}{x^3}z'\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x^4}z''\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Si on remplace tout dans l'équation initiale, on obtient

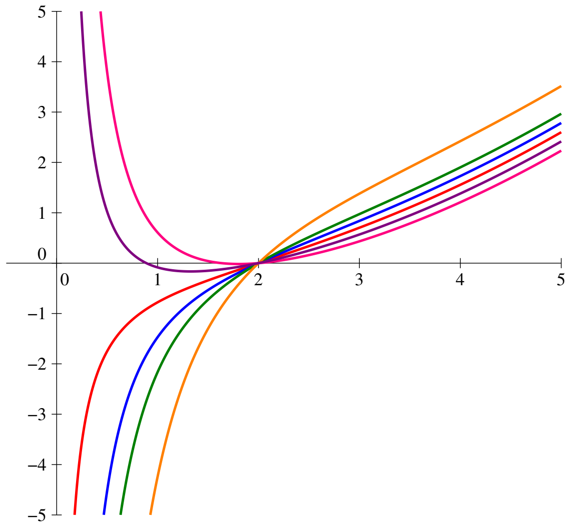
$\dfrac{2z'(t)}{t} + z''(t) - \dfrac{2z'(t)}{t} - z(t) = e^t$, soit $z''(t) - z(t) = e^t$. Cette équation du second ordre à coefficients constants se résout de façon tout à fait classique : les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $z_h : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (pas besoin d'équation caractéristique ici, c'est un résultat qu'on conait par coeur). Il faut tout de même faire attention à chercher une solution particulière sous la forme $z_p(t) = (at + b)e^t$ (augmentation du degré nécessaire puisque 1 est racine de l'équation caractéristique qu'on n'a pas écrite), ce qui donne $z'p(t) = (at + a + b)e^t$, puis $z_p''(t) = (at + 2a + b)e^t$. La fonction z_p est solution de l'équation si $at + 2a + b - at - b = 1$, donc si $a = \dfrac{1}{2}$ (et par exemple $b = 0$). Autrement dit, $z_p : t \mapsto \dfrac{1}{2}te^t$ est solution particulière, et les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $z : t \mapsto \left(\dfrac{1}{2}t + A\right) e^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à changer la variable pour conclure : $y(x) = \left(\dfrac{1}{2x} + A\right) e^{\frac{1}{x}} + Be^{-\frac{1}{x}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. L'indication de l'énoncé suppose qu'on travaille sur $\mathbb{R}^+$. De toute façon, la normalisation de l'équation obligera à enlever la valeur $x = 0$. Posons donc $y(x) = z(\sqrt{x})$, ce qui donne $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x})$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{4x} z''(\sqrt{x})$. L'équation initiale peut alors s'écrire $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$, soit $z''(t) - z(t) = 0$. Cette équation homogène a coefficients constants a pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$, et les fonctions solutions sont donc $z : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$. On en déduit que $y(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}}$.
Les plus courageux regarderont ce qui se passe sur $\mathbb{R}^{-*}$, où on pose cette fois $t = \sqrt{-x}$ et on obtient par un calcul très similaire à celui effectué ci-dessus $z'' + z = 0$, ce qui donne alors $y(x) = C\cos(\sqrt{-x}) + D\sin(\sqrt{-x})$. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Oui, on peut recoller les deux types de solution quand $C = \dfrac{A + B}{2}$ (pour avoir la même valeur de y en 0), et $D = \dfrac{A - B}{2}$ (pour avoir la même dérivée en 0). En fait, on aura dans ce cas $y(x) = C\,\mathrm{ch}(x) + D\,\mathrm{sh}(x)$ sur $[0; +\infty[$.

3. On peut résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$ en posant $y(x) = z(\arctan(x))$, ce qui implique $y'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} z'(\arctan(x))$ puis $y''(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2} z''(\arctan(x)) - \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2} z'(\arctan(x))$. En remplaçant dans l'équation initiale, $z''(\arctan(x)) - 2xz'(\arctan(x)) + 2xz'(\arctan(x)) + 4z(\arctan(x)) = 0$, soit $z''(t) + 4z(t) = 0$. On résout sans difficulté l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ (solutions $2i$ et $-2i$) pour prouver que $z(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$, donc $y(x) = A\cos(2\arctan(x)) + B\sin(2\arctan(x))$ (pour les plus courageux, on peut simplifier ces expressions). Quelques exemples de courbes intégrales de cette équation (encore une fois, ça n'a pas grand intérêt) :



4. Faisons donc : $y(x) = z(\ln(x))$ implique $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$ puis $y''(x) = \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x)) - \dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x))$, donc en reportant dans l'équation initiale $z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = x^2$, soit $z''(t)+2z'(t)+z(t) = e^{2t}$. L'équation caractéristique r^2+2r+1 admet -1 comme racine double donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z_h : t \mapsto (A+Bt)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = Ke^{2t}$. On aura alors $z_p'(t) = 2Ke^{2t}$, puis $z''(t) = 4Ke^{2t}$, donc on veut $4K+4K+K = 1$, soit $K = \dfrac{1}{9}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $z : t \mapsto (A+Bt)e^{-t} + \dfrac{1}{9}e^{2t}$. On retrouve alors $y(x) = \dfrac{A + B\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{9}x^2$. Pour changer un peu, essayons de tracer les courbes intégrales correspondant aux solutions prenant une valeur particulière, par exemple $y(2) = 0$, ce qui implique $\dfrac{A+B\ln(2)}{2} + \dfrac{4}{9} = 0$, soit $A = -\dfrac{8}{9} - B\ln(2)$. On obtient ce genre de courbes :



5. Il faut donc poser $y(x) = z(\sin(x))$ et dériver deux fois : $y'(x) = \cos(x)z'(\sin(x))$, puis $y''(x) = -\sin(x)z'(\sin(x)) + \cos^2(x)z''(\sin(x)) = -tz'(t) + (1-t^2)z''(t)$. On remarque en passant que $y'\tan(x) = \sin(x)z'(\sin(x)) = tz'(t)$, et $-\cos^2(x)y(x) = (\sin^2(x)-1)y(x) = (t^2-1)z(t)$. On peut donc tout remplacer dans l'équation initiale : $-tz' + (1-t^2)z'' + tz' + (t^2-1)z = 0$, soit $z'' - z = 0$ en simplifiant par $1-t^2$ (qui ne s'annule jamais sur l'intervalle choisi). On en déduit immédiatement que $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, donc $y(x) = Ae^{\sin(x)} + Be^{-\sin(x)}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 21 (***)

Comme $f'(x) = 2f(-x) + x$, f' est elle-même dérivable, et f est deux fois dérivable. Dérivons donc l'équation, on obtient $f''(x) = -2f'(-x)+1 = -2(2f(x)-x)+1 = -4f(x)+2x+1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $f'' + 4f = 2x + 1$, qui se résout sans difficulté : les solutions homogènes sont de la forme $A\cos(2x) + B\sin(2x)$ et une solution particulière évidente est la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{4}$, donc $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$. Reste à vérifier si les fonctions obtenues sont effectivement solutions du problème posé (la dérivation a transformé notre équation en une équation qui n'a aucune raison d'être équivalente). Avec la formule obtenue pour f, on calcule $f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2}$, puis $f'(x) - 2f(-x) - x = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2} - 2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) + x - \frac{1}{2} - x = 2(B - A)(\cos(2x) - \sin(2x))$. Si on veut que f soit solution du problème initial, il faut que cette expression s'annule, ce qui ne sera le cas que si $B = A$. Les solutions au problème posé sont donc les fonctions de la forme $f(x) = A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Exercice 22 (***)

Commençons par remarquer qu'en prenant $x = y = 0$, on a $2f(0) = 2f(0)^2$, donc $f(0)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Mais si $f(0) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$, $2f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle. Pour la suite, on peut supposer que $f(0) = 1$. Fixons désormais y et dérivons par rapport à x, on obtient $f'(x+y) + f'(x-y) = 2f(y)f'(x)$, puis en dérivant à nouveau $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(y)f''(x)$. De même, en dérivant deux fois par rapport à y, on obtient $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ (il y a deux changements de signe qui se compensent quand on dérive deux fois $f(x-y)$). Puisque le membre de gauche est le même dans les deux équations, on en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, soit en posant $y = 0$, $f''(x) = Kf(x)$, avec $K = f''(0)$.

Si $K = 0$, les solutions possibles sont de la forme $f(x) = ax+b$, avec $b = 1$ puisque $f(0) = 1$. Pour vérifier l'équationn fonctionnelle, on doit alors avoir $a(x+y)+1+a(x-y)+1 = 2(ay+1)(ax+1)$, soit $2(ax+1) = 2(a^2xy+ax+ay+1)$. Cette équation est vérifiée si $ax(ay+1) = 0$ quelles que soient les valeurs de x et y, ce qui impose manifestement $a = 0$. On trouve donc comme solution possible la fonction constante égale à 1.

Si $K > 0$, l'équation $f'' = Kf$ a pour équation caractéristique $r^2 - K = 0$, qui a deux solutions réelles $\pm\sqrt{K}$, f est alors de la forme $Ae^{Lx} + Be^{-Lx}$, où $L = \sqrt{K} > 0$. La condition $f(0) = 1$ impose $A + B = 1$, et l'équation fonctionnelle devient $Ae^{Lx+Ly} + Be^{-Lx-Ly} + Ae^{Lx-Ly} + Be^{-Lx+Ly} = 2(Ae^{Lx} + Be^{-Lx})(Ae^{Ly} + Be^{-Ly}) = 2(A^2e^{Lx+Ly} + ABe^{Lx-Ly} + ABe^{-Lx+Ly} + B^2e^{-Lx-Ly})$. Cela fonctionne bien si $2A^2 = A$, $2AB = A = B$ et $2B^2 = B$, ce qui donne $A = B = \frac{1}{2}$ (seule possibilité compatible avec $A + B = 1$). On obtient alors $f(x) = \frac{e^{Lx} + e^{-Lx}}{2} = \mathrm{ch}(Lx) = \mathrm{ch}(\sqrt{K}x)$.

Enfin, si $K < 0$, l'équation caractéristique a pour solutions $i\sqrt{-K}$ et $-i\sqrt{-K}$, donc en notant $L = \sqrt{-K}$, on aura $f(x) = A\cos(Lx) + B\sin(Lx)$. La condition $f(0) = 1$ impose immédiatement $A = 1$, puis l'équation devient, en posant par exemple $y = 0$, $2\cos(x) + 2B\sin(x) = 2\cos(x)$, ce qui impose assez clairement $B = 0$. On obtient une dernière famille de solutions de la forme $f(x) = \cos(Lx) = \cos(\sqrt{-K}x)$.

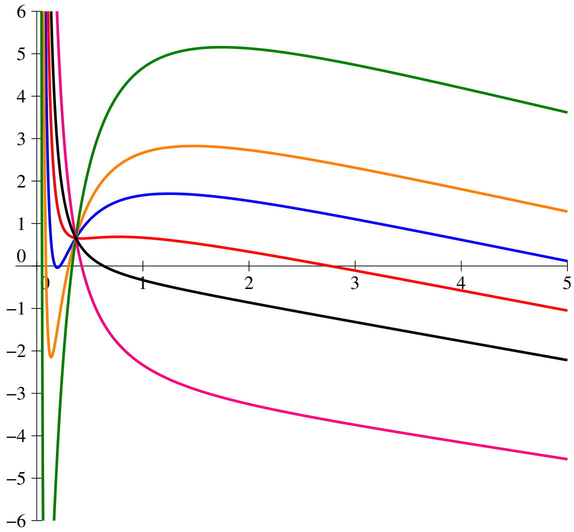
Exercice 23 (***)

1. Pour que f puisse vérifier l'équation de départ, il faut certainement qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Réécrivons cette équation un peu différemment : $2f'(x) = \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - 1$. Le membre

de droite est obtenu comme produit et composée de fonctions dérivables, donc il constitue une fonction dérivable, ce qui prouve que f' est dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable.

2. Pour obtenir du second ordre, dérivons l'équation de départ : $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2x(2f'(x)+1) + 2x^2f''(x)$. Reste à exprimer le membre de gauche plus simplement. Pour cela, on reprend la relation obtenue dans la première question pour $2f'(x)$ et on l'applique à $\frac{1}{x}$ (attention à bien modifier également le $\frac{1}{x^2}$ à droite) : $2f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2f(x) - 1$. On peut remplacer pour obtenir $-\frac{1}{x^2} \times \frac{x^2f(x)-1}{2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$, soit $-\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2x^2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation linéaire $2x^2f'' + 4xf' + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2x^2} - 2x$.
3. Autrement dit, on pose $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut alors dériver deux fois : $f'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \frac{1}{x^2}g''(\ln(x)) - \frac{1}{x^2}g'(\ln(x))$. Remettons tout ça dans l'équation obtenue à la question précédente : $2g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) + 4g'(\ln(x)) + \frac{1}{2}g(\ln(x)) = \frac{1}{2x^2} - 2x$. En posant $t = \ln(x)$, soit $x = e^t$, la fonction g est donc solution de l'équation à coefficients constants $2g''(t) + 2g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^t$.
4. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $2r^2 + 2r + \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$, et admet donc pour racine double $r = -\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $g_h : t \mapsto (A + Bt)e^{-\frac{t}{2}}$. Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, utilisons le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}e^{-2t}$ sous la forme $y_1(t) = ae^{-2t}$. Cela implique $y_1'(t) = -2ae^{-2t}$ et $y_1''(t) = 4ae^{-2t}$, donc y_1 est solution si $8ae^{-2t} - 4ae^{-2t} + \frac{a}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}e^{-2t}$, soit $a = \frac{1}{9}$. De même, on cherche une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = 2e^t$ sous la forme $y_2(t) = be^t$, avec cette fois la condition $2b + 2b + \frac{1}{2}b = 2$, donc $b = \frac{4}{9}$. Une solution particulière de l'équation est donc donnée par $g_p(t) = \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$, et les solutions complètes de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A + Bt)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$.
5. En remontant le changement de variables effectué, on doit avoir $f(x) = g(\ln(x)) = \frac{A + B\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x$.
6. Comme on a travaillé uniquement par implications, il reste à vérifier si les fonctions obtenues sont vraiment solutions du problème. D'un côté, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}(A - B\ln(x)) + \frac{x^2}{9} - \frac{4}{9x}$; de l'autre $f'(x) = \frac{\frac{B}{\sqrt{x}} - \frac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9} = \frac{2B - A - B\ln(x)}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9}$, donc $x^2(2f'(x)+1) = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \frac{4}{9x} - \frac{8}{9}x^2 + x^2 = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \frac{4}{9x} + \frac{x^2}{9}$. Les deux expressions coincident à l'unique condition que $2B - A = A$, soit $A = B$. Les fonctions solutions du problème initial sont donc toutes les fonctions $f : x \mapsto \frac{A(1 + \ln(x))}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x$.

   Et même si ce n'était pas demandé, on peut tracer quelques allures de courbes, ici en noir la courbe correspondant à $A = 0$, en rouge $A = 1$, en bleu $A = 2$, en orange $A = 3$, en vert $A = 5$, en rose $A = -2$. Toutes les courbes passent par un point commun pour $x = \dfrac{1}{e}$ (puisqu'alors $1 + \ln(x) = 0$), d'ordonnée $\dfrac{e^2}{9} - \dfrac{4}{9e} \simeq 0.66$.



Exercice 24 (****)

Comme $f''(x) = f'(-x) - 2f(x) + x^2$, l'hypothèse f dérivable deux fois implique que f'' est dérivable, puis qu'elle l'est elle-même deux fois, ce qui va permettre de dériver deux fois l'équation : $f'''(x) + f''(-x) + 2f'(x) = 2x$, puis $f^{(4)}(x) - f'''(-x) + 2f''(x) = 2$. En reprenant l'équation dérivée et en remplaçant les x par des $-x$, on a $f'''(-x) = -f''(x) - 2f'(-x) - 2x$, donc $f^{(4)}(x) + 3f''(x) + 2f'(-x) = 2 - 2x$, puis $f^{(4)}(x) + 5f''(x) + 4f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ en remplaçant le $f'(-x)$ à l'aide de l'équation de départ.

On obtient comme prévu une équation linéaire à coefficients constants du quatrième ordre, dont l'équation caractéristique sera $r^4 + 5r^2 + 4 = 0$. On pose $R = r^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $R^2 + 5R + 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et admet pour racines $R_1 = \dfrac{-5-3}{2} = -4$ et $R_2 = \dfrac{-5+3}{2} = -1$. Les solutions de notre équation caractéristique sont donc toutes complexes : $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$, $r_3 = i$ et $r_4 = -i$. En adaptant les résultats vus en cours, on en déduit que les solutions de l'équation homogène associée à l'équation du quatrième ordre sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x)$, avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$.

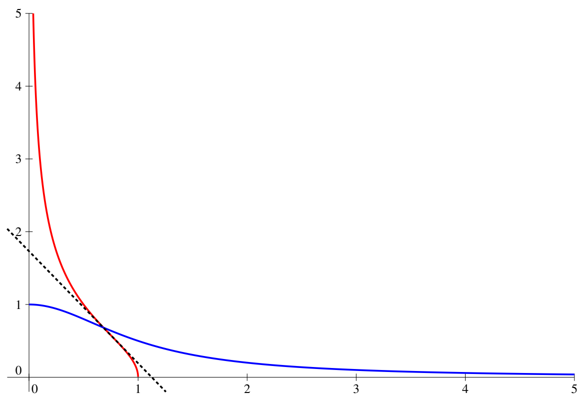
On cherche ensuite une solution particulière à notre équation, sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ (pas de raison de modifier ce qu'on faisait pour une équation du second ordre), ce qui implique $y_p''(x) = 2a$ et bien sûr $y^{(4)}(x) = 0$. La fonction y_p est donc solution de notre équation complète si $10a + 4ax^2 + 4bx + 4c = 2x^2 - 2x + 2$, ce qui est le cas pour $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{3}{4}$, donc pour $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$. Les solutions de notre équation du quatrième ordre sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} + \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x)$, avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$.

Attention toutefois, la réciproque n'est pas forcément vraie, il faut vérifier quelles sont les fonctions réellements solutions parmi celles-ci. Posons donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} + A\cos(2x) + B\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x)$, alors $f'(x) = x - \dfrac{1}{2} - 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - C\sin(x) + D\cos(x)$, et $f'(-x) = -x - \dfrac{1}{2} + 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + C\sin(x) + D\cos(x)$ en exploitant la parité des fonctions trigonométriques. Enfin, $f''(x) = 1 - 4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - C\cos(x) - D\sin(x)$. L'équation de départ est donc vérifiée si $x^2+(-2A-2B)\cos(2x)+(-2A-2B)\sin(2x)+(C-D)\cos(x)+(D-C)\sin(x)=x^2$. On peut procéder à une espèce d'identification (pour être rigoureux, il faudrait la justifier en prenant des valeurs particulières de x, ici $x=0$, $x=\pi$ et $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ suffiraient) pour obtenir les conditions suivantes sur les constantes : $-2A-2B=0$ et $C-D=0$, ce qui implique $B=-A$ et $C=D$. Les seules fonctions solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}+A(\cos(2x)-\sin(2x))+C(\cos(x)+\sin(x))$, avec $(A,C)\in\mathbb{R}^2$.

Problème (***)

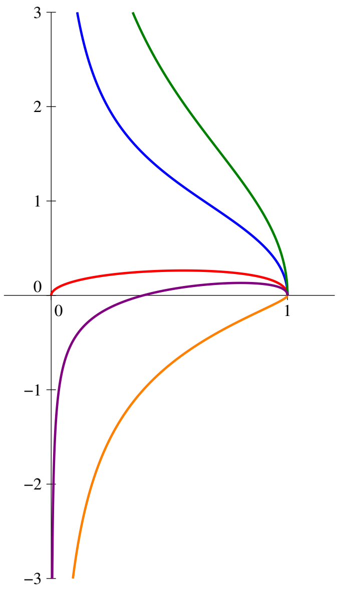
Première partie : Une étude de fonction.

1. La fonction f est définie si $\dfrac{1-x}{x}\geqslant 0$. Un petit tableau de signes donne $\mathcal{D}_f=]0,1]$ (attention à bien mettre les crochets dans le bon sens).
2. La fonction est dérivable sur $]0,1[$, de dérivée $f'(x)=\dfrac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=-\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction f est strictement décroissante. Comme de plus $f(1)=0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, f est bijective de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Cherchons à résoudre l'équation $f(x)=y$, soit $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=y$, on peut élever au carré pour obtenir $\dfrac{1-x}{x}=y^2$, soit $1-x=xy^2$, puis $x(y^2+1)=1$ et $x=\dfrac{1}{1+y^2}$. On a donc $g : y\mapsto\dfrac{1}{1+y^2}$, qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0,1]$ ($g(0)=1$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y)=0$). Le théorème de la bijection nous assure que g est décroissante tout comme f.
4. Calculons donc (en reprenant la dernière expression de f') la dérivée seconde $f''(x)=\dfrac{4x\sqrt{\frac{1}{x}-1}-\frac{2x^2}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}{4x^4(\frac{1}{x}-1)}=\dfrac{4x(\frac{1}{x}-1)-1}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3-4x}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est du signe de $3-4x$, et s'annule pour $x=\dfrac{3}{4}$. On calcule donc $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; et $f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{-1}{\frac{18}{16}\sqrt{\frac{1}{3}}}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. L'équation de la tangente au point correspondant est donc $y=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}x+\sqrt{3}$.
5. Voici une allure, avec la tangente calculée à la question précédente (f en rouge, g en bleu) :



Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

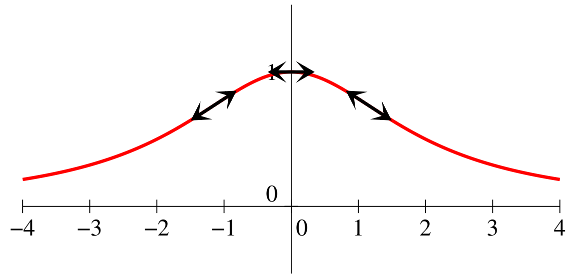
1. La normalisation faisant apparaitre deux valeurs interdites, et le membre de droite n'est pas défini entre -1 (inclus) et 0, donc on résout séparément sur $]-\infty,-1[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
2. Mettons au même dénominateur le membre de droite : $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{1-x}=\dfrac{a-ax+bx}{x(1-x)}$. En identifiant, ceci est égal à $\dfrac{1}{2x(1-x)}$ si $a=\dfrac{1}{2}$ et $a-b=0$, soit $b=\dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\dfrac{1}{2x(1-x)}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(1-x)}$. L'équation homogène normalisée $y'+\dfrac{1}{2x(1-x)}y=0$ a donc pour solutions sur $]0,1[$ les fonctions $y_h : x\mapsto K_1e^{-\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)}=K_1\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=K_1f(x)$, avec $K_1\in\mathbb{R}$. Sur $]1,+\infty[$, on obtient de même $y_h(x)=K_2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$, et sur $]-\infty,-1[$, $y_h(x)=K_3\sqrt{\dfrac{1-x}{-x}}=K_3\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$.
3. Effectuons par exemple le calcul sur $]0,1[$, on cherche donc $y_p(x)=K(x)f(x)$, d'où $y_p'(x)=K'(x)f(x)-\dfrac{K(x)}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$. La fonction y_p est alors solution si $2x(1-x)K'(x)f(x)-\dfrac{\sqrt{x(1-x)}}{x}K(x)+K(x)f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, donc $K'(x)=\dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit que $K(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(x)$ convient, ce qui donne pour solutions de l'équation complète les fonctions $y(x)=\left(\dfrac{1}{2}\arcsin(x)+K_1\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. De même, sur $]1,+\infty[$, on va trouver la condition $K'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, ce qui correspond au facteur 2 près à la dérivée de la réciproque de la fonction sh que nous n'avons pas étudiée en cours (on peut tout de même réussir à trouver une expression explicite en étant motivés, je vous laisse vérifier que $K(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ convient). On a le même problème sur le dernier intervalle de résolution (même solution particulière au signe près). Il n'y a évidemment pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ puisque l'équation ne peut pas avoir de sens sur l'intervalle $]-1,0[$.
4. En $\dfrac{1}{2}$, on a $\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{6}$, donc $y(x)=\dfrac{\pi}{12}+K_1$ (la racine carrée vaut simplement 1), il faut donc choisir $K_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$. On a alors $y(x)=\left(\dfrac{1}{2}\arcsin(x)+\dfrac{\pi}{6}\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.
5. Tout ce qu'on peut dire assez facilement, c'est que toutes les fonctions vont tendre vers 0 en 1, et auront une limite égale à $\pm\infty$ (selon le signe de K_1) si $K_1\neq 0$. Ensuite, les problèmes de Cauchy dans $]0,1[$ ne pouvant avoir qu'une seule solution, les courbes ne peuvent pas se couper ailleurs que pour $x=1$. On ne peut rien dire sur les variations de la fonction, mais la présence d'une tangente verticale en $x=1$ est assurée si $K\geqslant 0$. À partir de ces maigres informations, si on trace des courbes relativement simples, on ne sera pas loin de la réalité (en rouge, la solution de la question précédente, en vert celle correspondant à $K=0$, qui a une limite nulle en 0 mais c'est difficile à prouver) :



Une équation non linéaire.

1. Si y est constante, sa dérivée est nulle, donc elle vérifie $2y(1-y) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ ou $y = 1$.
2. Si y est à valeurs dans $]0,1[$, on aura toujours $2y(1-y) \geqslant 0$, donc pour vérifier l'équation on doit nécessairement avoir $xy' \leqslant 0$, d'où $y' \leqslant 0$ (puisque $x \in]0,1[$). La fonction y est donc décroissante.
3. Une fonction continue et monotone est toujours bijective, notons $z = y^{-1}$, on sait que $z'(t) = \dfrac{1}{y'(z(t))}$ (où on pose $t = y(x)$), ou encore $y'(z(t)) = \dfrac{1}{z'(t)}$. En remplaçant x par $z(t)$ dans l'équation (F), on obtient $z(t)y'(z(t)) + 2z(t)(1-z(t)) = 0$, soit $\dfrac{z(t)}{z'(t)} + 2t(1-t) = 0$. On peut multiplier par $z'(t)$ pour trouver $z(t) + 2t(1-t)z'(t) = 0$. On reconnait bien l'équation annoncée.
4. La variable t ayant été supposée appartenir à $]0,1[$, on reprend les résultats de la partie précédente : $z(t) = Kf(t) = K\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On en déduit que $x = K\sqrt{\dfrac{1-y(x)}{y(x)}}$, soit $\dfrac{x^2}{K^2}y(x) = 1 - y(x)$, donc comme annoncé $y(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{K})^2}$. On peut toujours prendre une constante K strictement positive, puisque 0 est exclu, et K et $-K$ donnent la même fonction pour y. Les valeurs obtenues pour $y(x)$ sont manifestement positives, et tout aussi manifestement plus petites que 1 (puisque le dénominateur est strictement supérieur à 1), donc toutes les solutions trouvées conviennent.
5. Cette condition impose $1+\left(\dfrac{x_0}{K}\right)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$, soit $\dfrac{x_0}{K} = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha} - 1}$ (tout est positif), donc $K = \dfrac{x_0}{f(\alpha)}$.
6. Pour avoir une allure plus précise de la courbe, on va chercher les valeurs d'annulation de la dérivée seconde comme dans la première partie. Écrivons donc $y(x) = \dfrac{K^2}{K^2+x^2}$, et dérivons deux fois : $y'(x) = -\dfrac{2K^2x}{(K^2+x^2)^2}$ (les solutions sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$), et $f''(x) = \dfrac{-2K^2(K^2+x^2)^2 + 4x(K^2+x^2)(2K^2x)}{(K^2+x^2)^4} = \dfrac{-2K^4 - 2K^2x^2 + 8K^2x^2}{(K^2+x^2)^3} = \dfrac{2K^2(3x^2-K^2)}{(K^2+x^2)^3}$. Cette dérivée seconde s'annule si $x = \dfrac{K}{\sqrt{3}}$. Remarquons que $y\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, et $f'\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{8K\sqrt{3}}$.

Si on impose la condition $f(2) = \frac{1}{2}$, on trouve $K = \frac{2}{f(\frac{1}{2})} = 2$, donc le point d'annulation de la dérivée seconde est atteint pour $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et $f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{9}{16\sqrt{3}}$. On peut tracer la courbe suivante :



Problème 2 : sur les intégrales de Wallis et l'intégrale de Gauss

I. Étude des intégrales de Wallis.

1. On commence gentiment : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$.

   On continue tout aussi trivialement : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$.

   Pour la troisième, on peut utiliser la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour en déduire que $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, donc $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

2. Puisqu'on nous le propose si gentiment, calculons donc I_{n+2} à l'aide d'une IPP en posant $u(t) = \cos^{n+1}(t)$, donc $u'(t) = -(n+1)\cos^n(t)\sin(t)$, et $v'(t) = \cos(t)$ pour lequel on peut prendre $v(t) = \sin(t)$. On obtient alors $I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)\sin^2(t)\ dt$. Le crochet s'annule, et on peut bien sûr écrire $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ dans le terme restant pour obtenir $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Autrement dit, on aura $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, ce qui donne bien la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

   On en déduit aisément, en prenant $n = 1$ puis $n = 2$, que $I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$, et $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$.

3. Nous allons donc effectuer une récurrence. Au rang $n = 0$, on a bien $\frac{0!}{2^0 \times 0!^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$, donc la propriété est vraie.

   Supposons désormais la formule vérifiée au rang n, alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!} \times \frac{\pi}{2}$.

   On multiplie en haut et en bas par $2n+2 = 2(n+1)$ et on trouve $I_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2} \times \frac{\pi}{2}$, ce qui est exactement la formule souhaitée au rang $n+1$. La formule est donc héréditaire, et vraie pour tout entier naturel n.

4. Cette deuxième récurrence est encore plus simple : au rang 0, on a $1 \times I_0 \times I_1 = \frac{\pi}{2}$ d'après les calculs de la première question, et en supposant la formule vraie au rang n, alors d'après le résultat de la question 2, $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

II. Calcul de l'intégrale de Gauss.

1. Par définition, f est la primitive s'annulant en 0 de la fonction (continue) $u \mapsto e^{-u^2}$, donc f est dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x^2}$. En particulier, cette dérivée étant toujours positive, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si on a oublié l'inégalité de convexité vue en cours, on pose classiquement $g(x) = e^x - 1 - x$. La fonction g est bien sûr définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x - 1$. Cette dérivée est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$, donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ de valeur $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$. En particulier, la fonction g est donc toujours positive, exactement ce qu'on cherchait à prouver.
3. Appliquons tout d'abord la majoration de la question précédente au nombre $x = -\dfrac{u^2}{n}$ pour obtenir $1 - \dfrac{u^2}{n} \leqslant e^{-\frac{u^2}{n}}$. Comme on a supposé $0 \leqslant u \leqslant \sqrt{n}$, on a $1 - \dfrac{u^2}{n} \geqslant 0$, on peut donc élever l'inégalité précédente à la puissance n sans avoir à changer son sens, ce qui donne exactement l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé. Pour celle de droite, on pose cette fois $x = \dfrac{u^2}{n}$, puis on élève de même à la puissance n (encore une fois, tout est positif) pour trouver $\left(1 + \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leqslant e^{u^2}$, et on passe enfin à l'inverse cette minoration, en changeant bien sûr le sens de l'inégalité, ce qui donne la deuxième moitié de l'encadrement souhaité en utilisant le fait que $\dfrac{1}{e^{u^2}} = e^{-u^2}$.
4. Effectuons donc le changement de variable demandé $u = \sqrt{n}\sin(t)$ (ou si on préfère $t = \arcsin(\frac{u}{\sqrt{n}})$). Les bornes de l'intégrale deviennent alors $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$. L'expression à l'intérieur de l'intégrale devient $\left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n = (1 - \sin^2(t))^n = \cos^{2n}(t)$, et enfin l'élément différentiel vérifie $du = \sqrt{n}\cos(t)\, dt$, ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n+1}(t)\ dt = \sqrt{n} I_{2n+1}$.
5. Même principe en posant $u = \sqrt{n}\tan(t)$ (ou encore $t = \arctan(\frac{u}{\sqrt{n}})$) : les bornes deviennent $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, l'expression dans l'intégrale se transforme en $\dfrac{1}{(1 + \tan^2(t))^n} = \cos^{2n}(t)$ en utilisant l'égalité $\dfrac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$ (formules de dérivation de la fonction tangente). Enfin, l'élément différentiel vérifie cette fois $du = \sqrt{n}(1 + \tan^2(t))\ dt = \sqrt{n} \times \dfrac{1}{\cos^2(t)}\ dt$. On en déduit effectivement que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n}\ du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$.
6. L'encadrement de la question 3 étant justement valable sur l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$ sur lesquel on souhaite intégrer, tout va bien, et les formules des questions 4 et 5, nous assurent alors que $\displaystyle\sqrt{n} I_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\ du \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$. Attention, les bornes de la dernière intégrale ne sont pas tout à fait les bonnes pour pouvoir conclure directement, mais ce n'est pas gênant : la fonction $\cos^{2n-2}$ étant certainement positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$ est positive, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$, ce qui nous permet d'obtenir l'encadrement souhaité.

7. Commençons par calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_{2n+1}$. On sait d'après l'énoncé que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} I_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Il suffit alors d'écrire $\sqrt{n} I_{2n+1} = \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \times \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ pour en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Un calcul identique prouve de même que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_{2n-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer à l'encadrement de la question précédente le théorème des gendarmes pour en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.