Feuille d'exercices n° 16 : Analyse asymptotique

MPSI Lycée Camille Jullian

8 février 2022

Exercice 1 (*)

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k!$
7. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 3 (***)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n.
3. Prouver par récurrence que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 4 (** à ***)

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1 + \tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0
2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ en $+\infty$

3. $\ln(\cos(x))$ en 0
4. $(x+1)^x - x^x$ en 0
5. $\sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ en $+\infty$
6. $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
7. $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x$ en $+\infty$ et en 0
8. $\dfrac{\ln(x^2+1) - \ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1) - \ln(x^3-1)}$ partout où c'est intéressant

Exercice 5 (**)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
4. Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.
5. Montrer que $u_n + 1 \sim \dfrac{1}{n}$, puis que $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
6. Comme vous avez du temps à perdre, continuez les calculs jusqu'à avoir un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{n^5}$.

Exercice 6 (* à **)

Calculer les développements limités suivants (on utilisera la notation $DL_n(a)$ pour indiquer le développement limité à l'ordre n au point a) :

- $DL_4(0), f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $DL_6(0), f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $DL_4(1), f(x) = e^x$
- $DL_2(0), f(x) = \sqrt{3+\cos(x)}$
- $DL_4(0), f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_5(0), f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
- $DL_3(0), f(x) = \sqrt{x+2}$
- $DL_4(0), f(x) = \ln(1+e^x)$
- $DL_6(0), f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $DL_3(0), f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_5(0), f(x) = e^{\sin(x)}$
- $DL_3(2), f(x) = x^4$
- $DL_4(0), f(x) = (1+\sin(x))^x$
- $DL_2(1), f(x) = \arctan(x)$
- $DL_3(1), f(x) = \ln(\sqrt{x})$
- $DL_3(0), f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0), f(x) = \ln(\cos(3x))$
- $DL_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right), f(x) = \cos(x)$
- $DL_3(0), f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$
- $DL_2(0), f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- $DL_3(0), f(x) = \ln(2e^x + e^{-x})$
- $DL_2(0), f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_2(2), f(x) = x^x$
- $DL_2(0), f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$
- $DL_6(0), f(x) = \mathrm{ch}(\ln(\mathrm{ch}(x)))$
- $DL_4(0), f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)}$
- $DL_{17}(0), f(x) = \sqrt{\cos(x^3) + \mathrm{ch}(x^3) - 2}$

Exercice 7 (***)

On note f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$. Montrer que f est bijective et calculer un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ de sa réciproque g.

Exercice 8 (* à **)

Calculer (à l'aide de développements limités ou non) les limites suivantes.

- $\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-3x+2}$
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-x$
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos(x)}{x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x))}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 9 (** à ***)

Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x)=2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x)=x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.
6. $f(x)=\frac{\arctan(x)}{\sin^3(x)}-\frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.
7. $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ en $+\infty$ (on donnera un développement asymptotique avec trois termes).
8. $f(x)=\frac{x\ln(x)}{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $f(x)=x^{1-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (***)

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n=n-\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n=u_n+\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes (au moins à partir d'un certain rang).

Exercice 11 (**)

Pour tout entier naturel n, on note $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(x)\,dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Simplifier l'expression de I_n+I_{n+2}. En déduire la convergence et la limite de (I_n).
3. À l'aide d'une IPP, montrer que $\forall n\geqslant 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\tan^n(x)\,dx=\frac{1}{2}-nI_n$.
4. En déduire un équivalent simple de I_n.

Exercice 12 (***)

1. Montrer que l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, qu'on notera désormais u_n (on supposera $n\in\mathbb{N}$ pour la suite).
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Donner un équivalent simple de u_n.

3. Montrer que $\arctan(u_n) = u_n - n\pi$, et en déduire un deuxième terme du développement asymptotique de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Continuer les calculs jusqu'à obtenir un développement asymptotique de u_n à la précision $\frac{1}{n^3}$.

Exercice 13 (***)

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f. Étudier la parité de f.
2. Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$. En déduire en particulier l'équation de la tangente en $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette tangente au voisinage de 0.
3. Étude locale au voisinage de $+\infty$.
   (a) Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1 - X^2)\ln\left(1 + \frac{2X}{1-X}\right)$.
   (b) En déduire un développement asymptotique de f à l'ordre $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   (c) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette asymptote.
   (d) Que se passe-t-il en $-\infty$?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, étudier sa dérivabilité à cet endroit.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f et l'exprimer en fonction de $g(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}$. On rappelle qu'une fonction de la forme $\ln|u|$ peut être immédiatement dérivée en $\frac{u'}{u}$ sans se préocupper du signe de $u(x)$.
6. Étudier les variations et le signe de g sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. On prouvera en particulier que g s'annule en une seule valeur α vérifiant $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$. En déduire le tableau de variations complet de f.
7. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ (on donne $\alpha \simeq 0.65$ et $f(\alpha) \simeq -0.9$).

Exercice 14 (**)

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{(x^2+1)\arctan(x)}{x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité et dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente en 0, et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage de 0.
4. Montrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$, donner son équation ainsi que sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$. Que se passe-t-il en $-\infty$?
6. On pose $h(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2-1}$. Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}^{+*}$.
7. En déduire les variations de f.
8. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 15 (**)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'unique solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation $e^x = n - x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est correctement définie.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis sa limite éventuelle.
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.
4. Montrer que $u_n = \ln(n) + \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{n}\right)$, en déduire un développement asymptotique de u_n à la précision $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

Problème (***)

On s'intéresse dans tout cet exercice à la fonction $g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x+x^2}$.

1. Étude de la fonction g.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Calculer la dérivée de g et prouver que $g'(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}(2x^3 - x^2 - 2x - 2)$.
   (c) Sans chercher à résoudre d'équation du troisième degré, montrer que g' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en une valeur α vérifiant $1 < \alpha < 2$ (on pourra redériver un morceau de g').
   (d) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   (e) La fonction g prolongée à gauche en 0 admet-elle une demi-tangente à gauche en 0 (si oui, déterminer sa pente) ?
   (f) Donner un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (g) Effectuer un développement asymptotique de g à l'ordre $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ (on commencera par sortir un facteur x de la racine carrée). En déduire la présence d'une asymptote oblique dont on donnera l'équation, ainsi que la position relative de la courbe de g et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
   (h) La même droite est-elle asymptote quand x tend vers $-\infty$? Sinon, que se passe-t-il de ce côté-là ?
   (i) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de g. On donne $\alpha \simeq 1,55$ et $g(\alpha) \simeq 4,2$.
2. Un peu de suites implicites.
   (a) Justifier que, $\forall n \geqslant 5$, l'équation $g(x) = n$ admet deux solutions distinctes u_n et v_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $u_n < \alpha$ et $v_n > \alpha$.
   (b) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont monotones et prouver rigoureusement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (c) En partant de l'équation $g(u_n) = n$, montrer que $\ln(n)u_n = 1 + \dfrac{u_n}{2}\ln(1 + u_n + u_n^2)$. En déduire un équivalent simple de u_n.
   (d) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)$ (attention à la rédaction !).
   (e) Utiliser l'expression précédente pour obtenir le terme suivant du développement asymptotique de la suite (u_n).
   (f) Donner un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$ (on oubliera pas que (v_n) tend elle-même vers $+\infty$, contrairement à (u_n)).
   (g) Montrer que $v_n = ne^{-\frac{1}{v_n}}\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de $v_n - n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (h) Calculer un développement asymptotique de v_n sous la forme $v_n = n + a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.