Feuille d'exercices n° 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

11 octobre 2021

Exercice 1 (***)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, initialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.

2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\times k! = (n+1)!-1$. Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=1} k\times k! = 1\times 1! = 1$ et $2!-1 = 2-1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} k\times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k\times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1)-1 = (n+2)!-1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

3. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : « Un polygone à n côtés a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales ». Le premier polygone à avoir des diagonales est le carré (ce qui correspond à $n = 4$), qui a deux diagonales. Comme $\dfrac{4\times 1}{2} = 2$, la propriété P_4 est donc vraie. Supposons maintenant la propriété vraie au rang n, et essayons de la prouver au rang $n+1$. Partons donc d'un polygone à n côtés, et rajoutons un sommet entre deux sommets de ce polygone pour obtenir un polygone à $n+1$ côtés. Ce faisant, on crée $n-1$ nouvelles diagonales : $n-2$ reliant le nouveau sommet à tous les anciens, en excluant les deux sommets qui se trouvent à côté de lui ; et une dernière reliant les deux sommets voisins du nouveau sommet (qui étaient auparavant reliés par un côté du polygone, et le sont désormais par une diagonale). Le nombre de diagonales de notre nouveau polygone vaut donc $n-1+\dfrac{n(n-3)}{2}$ (ce deuxième terme issu de l'hypothèse de récurrence) $= \dfrac{2n-2+n^2-3n}{2} = \dfrac{n^2-n-2}{2} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et permet de conclure la récurrence.

4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $f^{(0)}(x) = (x-1)e^{-x}$, ce qui est vrai. Supposons donc la propriété P_n vérifiée, alors $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n e^{-x} - (-1)^n(x-n-1)e^{-x} = ((-1)^{n+1}(x-n-1)+(-1)^n)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-n-1-1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-(n+1)-1)e^{-x}$, ce qui prouve P_{n+1}. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

5. Allons-y pour une dernière récurrence. Pour $n = 0$, les deux sommes sont vides et donc égales à 0. Si vraiment on préfère initialiser en faisant un petit calul, pour $n = 1$, la somme de droite comporte un seul terme égal à $\dfrac{1}{2}$, et celle de gauche vaut $1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ça marche aussi. Supposons l'égalité vérifiée au rang n, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, cette somme est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$. Le problème étant qu'on veut désormais avoir des $n+1+k$ au dnominateur de la fraction, on effectue donc un décalage d'indice pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{2(n+1)} =$

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$, c'est-à-dire exactement l'expression souhaitée. L'hérédite est donc prouvée, et la formule vérifiée pour tout entier naturel n.

Exercice 2 (**)

On calcule $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 26$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 3^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 3^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 1$.

Exercice 3 (**)

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 4 (***)

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété $P_n : u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 5 (*)

1. $S_1 = \sum_{i=3}^{i=12} 2^i$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} 2i(-1)^{i+1}$

Exercice 6 (** à ***)

- $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
- $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$

- $\displaystyle\sum_{k=1000}^{k=2021} 3 = 3 \times 1\ 022 = 3\ 066$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
  $\displaystyle = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
  $\displaystyle = 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
  $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 7 (**)

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\displaystyle\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{ak^2 + ak + bk^2 - b + ck^2 + ck}{k(k^2-1)}$. En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$, $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1} = -2\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} + 5\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k+1} =$ $\displaystyle -2\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} + 5\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=3}^{k=n+1} \frac{1}{k} = -2\sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} - 2 - 1 + 5\sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} + \frac{5}{2} + \frac{5}{n} - 3\sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} =$ $\displaystyle -\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}$.

Exercice 8 (**)

1. C'est une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = (n+1)^3 - 1$.
2. Comme $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$.
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$, soit en utilisant le résultat de la première question $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = (n+1)^3 - 1$, ou encore $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 =$ $n^3 + 3n^2 + 3n$. Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 -$ $\displaystyle \frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. On retrouve donc la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 9 (***)

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i\sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3 + j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{2}$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} - (n-j)j) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2-(n+1)j+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$
  $\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-(n+1)+n\right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i\sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 10 (**)

- $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} k-1}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n}$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n}(k-1)\prod_{k=2}^{k=n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n} k\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3) = \prod_{k=1}^{k=n} 3(2k-1) = 3^n\prod_{k=1}^{k=n}(2k-1) = 3^n\frac{\prod_{k=1}^{k=2n} k}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} = 3^n\frac{(2n)!}{2^n\times n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{(2n)!}{n!}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k} = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sqrt{k+1} = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}\prod_{k=2}^{n+1}\sqrt{k} = 1\times\prod_{k=2}^{n}(\sqrt{k})^2\times\sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}\times n!$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 4^k}{\prod_{k=1}^{n} k^2} = \frac{4^{\sum_{k=1}^{n} k}}{(n!)^2} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n!)^2}$
- C'est en fait un calcul de somme double et pas de produit (les puissances d'une même variable x vont s'ajouter quand on va effectuer le produit) : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = x^s$, avec $\displaystyle s = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n} ni + \frac{n(n+1)}{2} = 2\times\frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1)$, donc $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = x^{n^2(n+1)}$

Exercice 11 (***)

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n + 1$ termes.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$.
3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \textbf{ pair}}^{k \leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \textbf{ impair}}^{k \leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = T_n + S_n$.
4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \dfrac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2 + 4n + 1) = 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 = 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Pour $n = 0$, on obtient P_0 : $\sum_{k=0}^{k=0} (2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} (2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n+3)^3 = (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2 + 4(n+1) + 1) = (n^2 + 4n + 4)(2n^2 + 8n + 7) = 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 8n^3 + 32n^2 + 28n + 8n^2 + 32n + 28 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Exercice 12 (***)

1. C'est assez immédiat : $\dfrac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{k^2}{k^2-1} = \dfrac{k^2-1+1}{k^2-1} = 1 + \dfrac{1}{k^2-1} \geqslant 1 + \dfrac{1}{k^2}$. Bien sûr, l'inégalité ne peut avoir de sens que si $k \geqslant 2$ pour que les deux membres soient définis.
2. Isolons le terme numéro 1 pour lequel l'inégalité précédente n'est pas vérifiée : $\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) \leqslant \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{(\prod_{k=2}^{n} k)^2}{(\prod_{k=2}^{n}(k-1)) \times (\prod_{k=2}^{n}(k+1))} = \dfrac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{k=3}^{n+1} k} = \dfrac{(n!)^2}{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}} = \dfrac{2n}{n+1} < 2$. Comme le premier terme isolé est lui-même égal à 2, on en déduit directement que $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) \leqslant 2 \times 2 = 4$.
3. Si on note $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)$, la suite (u_n) est une suite de réels positifs croissante (on multiplie à chaque fois par un nombre plus grand que 1 pour passer de u_n à u_{n+1}) et majorée par 4 d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc convergente, et c'est sa limite qu'on notera sous la forme d'un produit infini. Tout ce qu'on peut dire d'intelligent sur cette limite à partir des questions précédente, c'est que $2 \leqslant \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$. En calculant les valeurs de u_n pour des entiers $n > 1$, on pourrait améliorer la minoration obtenue, mais la majoration par 4 serait nettement plus difficile à modifier. Il n'existe de toute façon pas de formule simple pour ce produit infini, qui a une valeur approchée égale à 3.67608.

4. Vous pensez utiliser le même genre de majoration qu'à la question 1 ? C'est une très mauvaise idée, car on n'arrivera pas à créer le même genre de télescopage dans le produit permettant de majorer facilement. Au lieu de ça, puisqu'on nous fournit très gentiment la majoration souhaitée, faisons donc tout simplement une récurrence. Pour $n = 1$, le produit de gauche ne contient qu'un seul terme égal à 2, et le membre de droite est égal à $3 - 1 = 2$, donc l'inégalité est vérifiée. Supposons alors la majoration vérifiée pour un certain entier n, alors $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) = \left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leqslant \left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) = 3 + \frac{3}{(n+1)^3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)^3} = 3 - \frac{(n+1)^3+1-3n}{n(n+1)^3} = 3 - \frac{n^3+3n^2+3n+1+1-3n}{n(n+1)^3} = 3 - \frac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3}$. Pour achever de prouver l'hérédité, il faudrait donc réussir à démontrer que $\frac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3} \geqslant \frac{1}{n+1}$, pour en déduire que $3 - \frac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3} \leqslant 3 - \frac{1}{n+1}$. Pour cela, calculons leur différence : $\frac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3} - \frac{1}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+2-n(n+1)^2}{n(n+1)^3} = \frac{n^2-n+2}{n(n+1)^3}$. Le numérateur de cette fraction est toujours positif (il a un discriminant négatif), ce qui prouve la positivité du quotient et achève donc la récurrence. Notons qu'on peut donc définir, comme à la question précédente, le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)$, qui sera compris entre 2 et 3. Très curieusement, ce produit-ci admet une expression presque simple puisque $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 13 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton :

- $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$
- $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$
- $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 14 (***)

La première est une application directe de la formule du binôme : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$.

Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser la formule sans nom vue en cours, sachant qu'on peut oublier $k = 0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$.

Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Pour les curieux, la méthode faisant intervenir des dérivées : on pose $f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. La fonction f est polynômiale et bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$, mais on peut calculer sa dérivée de deux façons : à partir de la forme factorisée, on obtient $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$, mais à partir de la forme développée on aura $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. En posant $x = 1$, on a donc $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. De même, le calcul de la dérivée seconde de f donne facilement (toujours pour $x=1$) $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, et on conclut comme ci-dessus.

Exercice 15 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) :
$2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Exercice 16 (***)

1. Tiens, j'ai comme une envie de faire une récurrence sur n (l'entier p reste donc fixe tout le long du raisonnement). Il faut initialiser la récurrence pour $n = p$ puisque l'égalité n'a pas de sens avant : $\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$, et $\binom{p+1}{p+1} = 1$, donc l'égalité est vraie au rang p. Supposons-là vraie pour un certain entier $n \geqslant p$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Pascal pour constater que c'est égal à $\binom{n+2}{p+1}$, c'est-à-dire exactement ce qu'il fallait pour prouver l'hérédité. L'égalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant p$.
2. On peut écrire la relation de Pascal sous la forme $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$, donc $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, dont on déduit que $\sum_{k=p}^{n} \binom{p}{k} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k}{p+1} - \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (le coefficient binômial « impossible » étant nul).
3. Appliquons la formule pour $p = 1$: $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k$ est donc égale à $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$, on retrouve bien la formule du cours. Essayons ensuite pour $p = 2$: $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$ est égal à $\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$, donc $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$, puis $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On retrouve bien sûr également la formule du cours.

Exercice 17 (**)

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & & & 10z & = & 5 \end{array}\right.$

Il ne reste plus qu'à remonter le système triangulaire obtenu : $z = \frac{1}{2}$, puis $y = 8z - 3 = 1$ et enfin $x = 1 - 2y - 3z = -\frac{5}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

- $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 6 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & -3 \end{array} \right.$

  On remonte très rapidement le système : $z = 0$, puis $x = 3$ et $y = 2$, donc $\mathcal{S} = \{(3, 2, 0)\}$.

- $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & 3y & - & 5z & = & -1 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & & & 8z & = & -8 \end{array} \right.$

  On remonte : $z = -1$ puis $y = -3 - z = -2$ et enfin $x = \frac{1 + y - 3z}{2} = 1$, donc $\mathcal{S}\{(1, -2, -1)\}$

- $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & z & = & 3 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow 5L_2 - 3L_3$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array} \right.$

  On remonte : $z = 2$ puis $y = \frac{5 - 2}{3} = 1$ et $x = 2 - 2y - z = -2$, soit $\mathcal{S} = \{(-2, 1, 2)\}$.

- Le paramètre étant simplement dans le membre de droite du système, pas de raison de ne pas utiliser la méthode habituelle :

  $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & a \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & a - 15 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 2y & = & a - 16 \end{array} \right.$

  On remonte tranquillement le système qui a toujours une solution unique : $y = \frac{a}{2} - 8$, puis $z = -\frac{a}{2} + 7$ et $x = \frac{a}{2} - 1$, soit $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{a}{2} - 1, \frac{a}{2} - 8, -\frac{a}{2} + 7 \right) \right\}$.

- Il vaut mieux ici commencer par permuter les lignes pour ne pas avoir de pivot dépendant de m (ce qui empêche de faire des opérations sur les lignes en les multipliant par des coefficients susceptibles d'être nuls).

  $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow mL_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3-1 \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & m^2-m \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3-1 \\ & & & & (m^2+m-2)z & = & m^3+m^2-m-1 \end{array} \right.$$

Le système est de Cramer si $m \neq 1$ (à cause du coefficient devant y), et si $m^2 + m - 2 \neq 0$. Comme $m^2+m-2 = (m-1)(m+2)$ (il y a une racine évidente), les seules valeurs problématiques sont 1 et -2. Si $m \notin \{-2, 1\}$, on remonte le système pour trouver $z = \dfrac{m^3+m^2-m-1}{m^2+m-2} = \dfrac{(m+1)(m^2-1)}{(m-1)(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$, puis $y = \dfrac{m^3-1-(m^2-1)z}{m-1} = m^2+m+1-(m+1)z = m^2+m+1-\dfrac{(m+1)^3}{m+2}$, et enfin $x = m^2 - mz - y = -m-1-\dfrac{m(m+1)^3}{m+2}$ (valeurs sans aucun intérêt, d'ailleurs).

Regardons plutôt ce qui se passe dans les cas particuliers. D'abord si $m = 1$, le système triangulaire se réduit à l'unique équation $x+y+z = 1$ (effectivement, dans le système initial, les trois équations sont alors identiques), donc $\mathcal{S} = \{(x, y, 1-x-y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Dans le cas où $m = -2$, la dernière équation devient $0 = -3$, le système n'a alors pas de solution.

- Là encore, on va se débrouiller pour utiliser des pivots constants :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

On va avoir un système qui n'est pas un système de Cramer si $b = 0$, $a = 1$ ou $a = -2$ (cf le système précédent pour ces valeurs, le coefficient devant z est le même). Dans tous les autres cas, on a une solution unique dont l'expression ne présente aucun intérêt : $z = \dfrac{b-a}{2-a-a^2}$, $y = \dfrac{b-1}{b(a-1)} + \dfrac{b-a}{b(2-a-a^2)}$, et $x = 1 - \dfrac{b-1}{a-1} + \dfrac{b-a}{2+a}$.

Regardons les cas particuliers : si $b = 0$, l'inconnue y disparait tout simplement du système, et la deuxième équation donne $x + z = 0$. Or, en additionnant les deux équation extrêmes, on trouve $(a+1)(x+z) = 2$, ce qui est impossible si $x + z = 0$. Il n'y a donc pas de solution.

Si $a = 1$, les membres de gauche des trois équations sont identiques égaux à $x + by + z$, mais celui de droite vaut b dans la deuxième équation et 1 dans les deux autres. Si $b \neq 1$, il n'y a donc pas de solution, et si $b = 1$, les solutions sont de la forme $(x, y, 1-x-y)$.

Si $a = -2$, la somme des trois équations donne $0 = b + 2$, il faut donc avoir $b = -2$ également. On doit alors résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array} \right.$.

La différence des deux premières équations donne alors $-3x-6y = 3$, soit $x = -1-2y$, la différence des deux dernières donne $-6y - 3z = 3$, soit $z = x = -1 - 2y$. On ne peut pas faire mieux, donc $\mathcal{S} = \{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 18 (**)

Puisqu'on va devoir exprimer la réciproque, autant essayer de le faire immédiatement, cela prouvera que l'application est bijective. Il s'agit en fait de résoudre le système $f(x, y, z) = (a, b, c)$ pour tout triplet de réels (a, b, c), autrement dit d'exprimer les solutions en fonction de a, b et c, ce qui donnera immédiatement l'expression de la réciproque.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & a \\ x & + & 3y & + & 2z & = & b \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & a \\ 9x & + & 5y & & & = & 3b-2c \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 5a-3b+2c \\ 9x & + & 5y & & & = & 3b-2c \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$$

On remonte comme d'habitude le système : $x = 5a - 3b + 2c$, puis $y = -9a + 6b - 4c$, et enfin $z = 11a - 7b + 5c$. La solution étant toujours unique, tout triplet de $\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent, et f est bijective, de réciproque $f^{-1} : (a,b,c) \mapsto (5a - 3b + 2c, -9a + 6b - 4c, 11a - 7b + 5c)$.

Même méthode pour l'application g :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 7y & & & = & 3a-b \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 7y & & & = & 3a-b \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ & & y & & & = & 4c-3a+b \end{array}\right.$$

On remonte une dernière fois : $y = -3a + b + 4c$, puis $x = 6a - 2b - 7c$, et $z = 4a - b - 5c$, donc g est bijective et $g^{-1}(a,b,c) = (6a - 2b - 7c, -3a + b + 4c, 4a - b - 5c)$.