Feuille d'exercices n° 2 : Applications, relations, calcul dans $\mathbb{R}$.

MPSI Lycée Camille Jullian

13 septembre 2021

Exercice 1

On s'intéresse aux deux applications $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \mathrm{Ent}(\sqrt{n}) \end{array} \right.$. Déterminer quelles sont les applications injectives, surjectives et bijectives parmi f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = \mathrm{Ent}\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 3

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$, $F = \mathbb{R}^+$.
4. $i(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$, $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $F = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Exercice 4

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array} \right.$.

1. Déterminer tous les antécédents par f du couple $(4, 4)$, puis du couple $(1, 1)$.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
3. Montrer qu'un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent par f si et seulement si $x^2 - 4y \geqslant 0$. Représenter graphiquement l'ensemble correspondant.
4. Déterminer l'image réciproque par f d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, puis celle d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 5

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit une application injective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit une application surjective.
3. Dans le cas où f est bijective, décrire se réciproque f^{-1}.

Exercice 6

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 7

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Si $B \subset F$, quelle inclusion est nécessairement vérifiée entre les ensembles $f(f^{-1}(B))$ et B ?
2. À quelle condition sur f cette inclusion est-elle une égalité pour tout sous-ensemble $B \subset F$?
3. Si $A \subset E$, quelle inclusion est nécessairement vérifiée entre les ensembles $f^{-1}(f(A))$ et A ?
4. À quelle condition sur f cette inclusion est-elle une égalité pour tout sous-ensemble $A \subset E$?

Exercice 8

Dans cet exercice, on s'intéresse à quelques propriétés des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ pour des sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}$.

1. En prenant pour cette question l'ensemble A de tous les entiers naturels, la fonction $\mathbb{1}_A$ est-elle injective ? Surjective ?
2. Quels sont les ensembles A pour lesquels $\mathbb{1}_A$ n'est pas surjective ?
3. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
4. Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ (et démontrer la formule, bien entendu).
5. Déduire des deux questions précédentes une expression de $\mathbb{1}_{A\backslash B}$, puis de $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ (on rappelle que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$).
6. Redémontrer beaucoup plus facilement que dans le devoir à la maison que la différence symétrique est une opération associative.

Exercice 9

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E \to \mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans $\mathbb{N}$ est dénombrable (c'est une conséquence du théorème démontré dans l'exercice suivant).

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

Exercice 10 : théorème de Cantor-Bernstein

Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de X sur Y. Pour cela, on note $\varphi = f \circ g$. On définit les sous-ensembles A_i de Y par récurrence de la façon suivante : $A_0 = Y \backslash f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i+1} = \varphi(A_i)$. On pose enfin $A = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que les ensembles A_i sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble A est stable par φ (c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset A$).
3. On pose $B = g(A)$, et $C = X \backslash B$. Montrer que $f(B) = A \backslash A_0$, et que tout élément de B possède un unique antécédent par g dans Y. On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \in A$.
4. On définit l'application $h : X \to Y$ en posant $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = f(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y.

Exercice 11

On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation définie de la façon suivante : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 12

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence d'un réel x. Combien comporte-t-elle d'éléments ?

Exercice 13

On considère sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le nombre d'éléments appartenant à la classe d'équivalence d'un réel x (on distinguera plusieurs cas selon la valeur de x).

Exercice 14

Déterminer pour chacune des relations suivantes s'il s'agit ou non d'une relation d'ordre, et si la relation d'ordre éventuelle est totale. On déterminera également dans ce cas si l'ensemble admet un plus grand et un plus petit élément.

1. relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan.
2. relation d'inclusion sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
3. relation $\mathcal{R}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^b \leqslant b^a$ sur $\mathbb{N}^*$, puis sur $\{3, 4, \dots\}$.
4. relation $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$ définie sur l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. relation $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leqslant y' - y$ sur $\mathbb{R}^2$. Le disque trigonométrique (centré en l'origine et rayon 1) possède-t-il un plus grand élément pour cette relation ? Une borne supérieure ?

Exercice 15

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(n, p)\mathcal{R}(n', p') \Leftrightarrow (n \leqslant n' \text{ et } p \leqslant p')$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'un ordre total ?
2. Existe-t-il un plus petit élément dans $\mathbb{N}^2$ pour cet ordre ? Un plus grand élément ?
3. On note $A = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$. Le sous-ensemble A admet-il un maximum et un minimum pour la relation $\mathcal{R}$? Admet-il une borne supérieure et une borne inférieure ?
4. On note $B = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \mid 10 < n + p < 20\}$. Mêmes questions que pour l'ensemble A de la question précédente.
5. Tout sous-ensemble majoré non vide de $\mathbb{N}^2$ admet-il une borne supérieure pour la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 16

Calculer $\inf\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$.

Exercice 17

Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$. On définit le **diamètre** de A comme étant le réel $\delta(A)=\sup\{|y-x|,(x,y)\in A^2\}$. Justifier que ce réel existe toujours sous les hypothèses faites sur l'ensemble A, et prouver que $\delta(A)=\sup(A)-\inf(A)$.

Exercice 18

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2-5x+6=0$
2. $2x^3-4x^2+3x-1=0$
3. $x=\sqrt{x}+2$
4. $x^3+5x^2\leqslant 6x$
5. $\dfrac{2x-3}{x^2-4}<1$
6. $(m-1)x^2-2(m-2)x+m+1=0$ (où m est un paramètre réel inconnu ; on exprimera les solutions en fonction de ce paramètre m, en distinguant si besoin des cas selon les valeurs de m)

Exercice 19

Soient x et y deux réls tels que $0<x\leqslant y$. On note $m=\dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique des deux réels), $g=\sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $h=\dfrac{2xy}{x+y}$ (moyenne harmonique). Montrer que $x\leqslant h\leqslant g\leqslant m\leqslant y$.

Exercice 20

Soient x, y et z trois réels vérifiant $x\in[1,4]$, $2\leqslant y\leqslant 5$ et $|z|<3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x-3y+1$
- $\dfrac{z}{2}$
- $\dfrac{1}{z-2}$
- $\dfrac{x(z-4)}{y-1}$
- $x(y-3)$
- $\dfrac{3x}{y+1}$
- x^2-4x+4
- $\sqrt{xy}-3e^{2-z}$

Exercice 21

Soient x et y deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x+y}$.
2. En déduire que, si $x\geqslant y$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}\leqslant\sqrt{x-y}$.
3. Montrer que, si z est un troisième réel positif, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x+z}{2}}+\sqrt{\dfrac{y+z}{2}}$.
4. En déduire que, si a, b et c sont les trois côtés d'un triangle quelconque, $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3| \geqslant 5$
2. $|2x-4| = |3x+2|$
3. $|x^2-8x+11| = 4$
4. $|x+3| + |3x-1| < -2$
5. $|x-2| \geqslant |4x+2|$
6. $|2x-3| + |3-x| - |x-7| = 2$
7. $|e^x - 3| < 1$
8. $\sqrt{|x^2-1|} = x-5$

Exercice 23

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$. Calculer $\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right|$.

Exercice 24

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x) = |2x-1| - 4$
2. $f(x) = |x^2-3x+2|$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}$

Exercice 25

On définit pour cet exercice une fonction f par $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Justifier soigneusement le domaine de définition de f.
2. Calculer les images suivantes, en simplifiant au maximum les résultats obtenus : $f(-2)$, $f\left(\frac{3}{5}\right)$, $f(\sqrt{2})$.
3. Déterminer toutes les limites importantes pour l'étude de la fonction f. Combien la courbe $\mathcal{C}_f$ admettra-t-elle d'asymptotes ?
4. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeurs absolues, en distinguant éventuellement plusieurs intervalles.
5. Expliquer pourquoi l'expression de la dérivée f' ne dépend pas de l'intervalle d'étude, puis calculer $f'(x)$.
6. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
7. Tracer une allure précise de la courbe $\mathcal{C}_f$.
8. Étudier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$.