# Feuille d'exercices n° 19 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

21 mars 2022

## Exercice 0 (*)

- $\displaystyle\int_0^x \lambda f(t) + \mu h(t)\ dt = \lambda \int_0^x f(t)\ dt + \mu \int_0^x h(t)\ dt$ par linéarité de l'intégrale, l'application est donc linéaire.
- Le calcul précédent reste identiquement valable en remplaçant la borne $x$ par $x^2$, l'application est toujours linéaire.
- Remplacer dans l'intégrale $f(t)$ par $f(t^2)$ n'empêche toujours pas de faire le même calcul, l'application est encore linéaire.
- $\displaystyle\int_0^x (\lambda f + \mu h)^2(t)\ dt = \lambda^2 \int_0^x f^2(t)\ dt + 2\lambda\mu \int_0^x f(t)h(t)\ dt + \mu^2 \int_0^x h^2(t)\ dt$, ce qui ne correspond pas du tout à une application linéaire.
- $\displaystyle\int_0^x t^2(\lambda f(t) + \mu h(t))\ dt = \lambda \int_0^x t^2 f(t)\ dt + \mu \int_0^x t^2 h(t)\ dt$, l'application est donc à nouveau linéaire.
- Le produit par $x^2$ à l'extérieur de l'intégrale ne modifie pas non plus la linéarité de l'application.
- $(\lambda f + \mu h)'' = \lambda f'' + \mu h''$ par linéarité de la dérivation, l'application est donc linéaire.
- Comment interpréter ce $f''(x^2)$ ? Normalement, on doit le lire comme $f''$ évaluée en $x^2$, auquel cas l'application reste sans problème linéaire. S'il s'était agi de $(f(x^2))''$ (avec donc une dérivée de composée), l'application ne serait plus du tout linéaire.
- Plus de linéarité ici, $(\lambda f''(x) + \mu h''(x))^2 \neq \lambda f''(x)^2 + \mu h''(x)^2$ en général.
- Celle-ci est par contre linéaire, l'application qui à $f$ associe $f''(0)$ est linéaire, et multilplier ensuite par $x^2$ ne modifie rien.
- Une somme de deux applications linéaires est toujours linéaires, c'est le cas ici.
- Il y a un bug d'énoncé, le $f'(t)$ devrait être dans l'intégrale (ou alors il devrait s'agir d'un $f'(x)$). Dans les deux cas, l'application n'est pas linéaire puisque, sans même parler de combinaisons linéaires, $\displaystyle\int_0^x (\lambda f(t))(\lambda f'(t))\ dt = \lambda^2 \int_0^x f(t)f'(t)\ dt$.

## Exercice 1 (*)

1. L'expression analytique de $u$ est donnée par $u(x, y, z) = u(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xu(1, 0, 0) + yu(0, 1, 0) + zu(0, 0, 1) = (x - 3y - 7z, -x + 2y + 4z, 2x - y + z)$ en appliquant simplement la linéarité.
2. Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ & & -y & - & 3z & = & 0 \\ & & -5y & - & 15z & = & -10 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, $(-1, 1, 8)$ n'a pas d'antécédent par $u$.

De même, pour le deuxième vecteur, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \\ & & -5y & - & 15z & = & -7 \end{array}\right.$

Pas d'antécédent non plus pour ce vecteur.

3. $u$ n'est pas surjective puisque certains éléments n'ont pas d'antécédent. Pour prouver que $u$ n'est pas non plus injective, on peut bien sûr déterminer son noyau, mais ce n'est en fait pas nécessaire. Soit on utilise le résultat du cours qui dit qu'un endomorphisme en dimension finie est injectif si et seulement si il estsurjectif, soit on constate que le système à résoudre pour obtenir le noyau ayant le même membre de gauche que les deux précédents, il ne sera pas de Cramer et admettra donc une infinité de solutions (puisqu'il en a au moins une, la solution nulle).

## Exercice 2 (***)

1. Supposons donc $v \in \text{Im}(u)$, il existe alors un $w \in E$ tel que $v = u(w)$. Mais alors $u(v) = u^2(w) = 0$ puisque $u^2 = 0$. Ceci prouve que $v \in \ker(u)$, donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$. Pour prouver que $id + u$ est un automorphisme, il suffit d'exhiber sa réciproque : $(id + u) \circ (id - u) = id - u^2 = id$ (les deux morphismes commutent évidemment). L'application $id + u$ est donc un automorphisme, de réciproque $id - u$.
2. Commençons par constater que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ est toujours vrai (si $u(v) = 0$, alors certainement $u(u(v)) = 0$). De même, on aura toujours $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$. Supposons alors que $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, et choisissons $v \in \ker(u^2)$, on peut donc écrire $u(u(v)) = 0$. Autrement dit, $u(v) \in \ker(u)$. Mais comme $u(v) \in \text{Im}(u)$, nécessairement $u(v) = 0$, ce qui prouve que $\ker(u^2) = \ker(u)$. Réciproquement, supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$, et choisissons $v \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. On peut donc écrire $v = u(w)$, avec $u(v) = 0$. Cela implique $u(u(w)) = u(v) = 0$, mais comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, $w \in \ker(u)$, donc $v = u(w) = 0$.

   Passons à la deuxième équivalence. Supposons d'abord $\ker(u) + \text{Im}(u) = E$, et choisissons $v \in \text{Im}(u)$. On peut donc écrire $v = u(w)$, avec par ailleurs $w = z + t$, où $z \in \ker(u)$, et $t = u(\alpha) \in \text{Im}(u)$ d'après l'hypothèse effectuée. Alors $v = u(z+t) = u(z) + u(t) = u(u(\alpha))$, ce qui prouve que $v \in \text{Im}(u^2)$. Réciproquement, supposons $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$, et choisissons $v \in E$. Par hypothèse, $u(v) \in \text{Im}(u^2)$, donc $u(v) = u(u(z))$. Posons alors $v = u(z) + (v - u(z))$. Par construction, $u(z) \in \text{Im}(u)$, mais par ailleurs $u(v - u(z)) = u(v) - u(u(z)) = 0$, donc $v - u(z) \in \ker(u)$. Nous avons bien prouvé que $v \in \text{Im}(f) + \ker(f)$ et achevé notre démonstration.

## Exercice 3 (**)

Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes et $\lambda$ une constante réelle, alors $f(z + \lambda z') = z + \lambda z' + a\overline{z + \lambda z'} = z + \lambda z' + a\overline{z} + \lambda a\overline{z'} = f(z) + \lambda f(z')$. Le noyau est constitué de tous les nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$, soit $z + a\overline{z} = 0$. Autrement dit, en notant $z = x + iy$, et $a = b + ic$, $f(z) = x + iy + (b + ic)(x - iy) = x + bx + cy + i(y + cx - by)$. Il faut donc que $(1 + b)x = cy$ et $(1 - b)y = cx$. Cela implique $(1 - b^2)y = c^2 y$, soit $(1 - b^2 - c^2)y = 0$. Si $a$ n'est pas de module 1, on trouve $y = 0$, puis $(1 + b)x = cx = 0$. On a déjà exclu la possibilité $1 + b = c = 0$ (qui correspond au nombre $a = -1$ qui est de module 1), donc dans ce cas, $\ker(f) = \{0\}$ et l'application est injective (et même bijective car le système donnant le noyau est de Cramer, ce qui suffit à prouver l'existence d'antécédents par $f$ de tout nombre complexe). Dans le cas très particulier où $a = -1$, le système se résume à $2y = 0$, soit $y = 0$, et $\ker(u) = \mathbb{R}$ (l'application n'est alors bien sûr pas bijective). Si $a$ est de module 1 (et différent de $-1$), on doit avoir $x = \dfrac{c}{1+b}y$. Dans ce cas, $cx = \dfrac{c^2}{1+b}y = \dfrac{1-b^2}{1+b}y = (1-b)y$, donc la deuxième équation est automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}\left(\frac{c}{1+b} + i\right)$. On peut écrire si on préfère $\frac{c}{1+b} = \frac{1-b}{c}$, mais il n'y a pas vraiment de façon complètement évidente d'exprimer ceci en fonction de $a$.

## Exercice 4 (**)

Les sous-ensembles $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, et leur intersection est constituée des vecteurs de la forme $(a,a,a)$ vérifiant $2a + a - a = 0$. seul le vecteur nul convient. Essayons désormais de décomposer un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ (on peut conclure plus rapidement pour la supplémentarité en utilisant un argument de dimension, mais nous aurons besoin de la décomposition ensuite de toute façon). Pour cela, écrivons plutôt $G = \{(x, y, 2x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche donc trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $(x,y,z) = a(1,1,1)+b(1,0,2)+c(0,1,1)$. Autrement dit, on veut résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ a & + & 2b & + & c & = & z \end{array}\right.$. Procédons, pour une fois, par substitution : $b = x - a$ et $c = y - a$, donc $a + 2x - 2a + y - a = z$, ce qui donne $x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = a$, puis $b = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ et $c = -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Puisqu'il y a toujours une solution au système, on peut écrire tout vecteur comme sous la forme $u_F + u_G$, avec $u_F = a(1,1,1) \in F$ et $u_G = b(1,0,2)+c(0,1,1) \in G$. Ce qui prouve que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. On a déjà effectué tous les calculs nécessaires à l'expression de la projection. Si on la note $p$, par définition, $p(x,y,z) = u_F = a(1,1,1) = \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)$. De même pour la symétrie $s$ : $s(x,y,z) = u_G - u_F = b(1,0,2) + c(0,1,1) - a(1,1,1) = (-x - y + z, -2x + z, -2x - y + 2z)$.

## Exercice 5 (*)

1. Supposons pour commencer $\ker(f) = \ker(f^2)$, et considérons $u \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. On peut donc trouver un vectuer $v$ tel que $u = f(v)$, et comme $u$ est également dans le noyau de $f$, on aura donc $f^2(v) = 0$, soit $v \in \ker(f^2)$. L'hypothèse faite implique alors que $v \in \ker(f)$, et donc que $u = f(v) = 0$, ce qui prouve bien que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

   Réciproquement, si $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, choisisson un vecteur $u \in \ker(f^2)$. Il vérifie alors $f(f(u)) = 0$, donc $f(u) \in \ker(f)$. Mais comme $f(u)$ appartient évidemment à $\text{Im}(f)$, il est donc nécessairement nul, ce qui prouve que $u \in \ker(f)$ et donc que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$. L'implication réciproque étant toujours vraie, on a achevé la démonstration.

2. Là encore on va procéder par double implication. Supposons dans un premier temps $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Soit $u \in E$, on peut écrire $f(u) = f^2(v)$ d'après l'hypothèse effectuée, puis décomposer $u$ sous la forme $u = u - f(v) + f(v)$, avec clairement $f(v) \in \text{Im}(f)$, mais aussi $u - f(v) \in \ker(f)$ puisque $f(u - f(v)) = f(u) - f^2(v) = 0$ par définition de $v$. On a donc bien $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$.

   Pour la réciproque supposons donc que $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$. L'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ étant toujours vraie, supposons simplement $u \in \text{Im}(f)$, on peut donc écrire $u = f(v)$, mais $v$ lui-même se décompose sous la forme $w + t$ avec $w \in \ker(f)$ et $t \in \text{Im}(f)$. On a alors $f(v) = f(w) + f(t) = f(t) \in \text{Im}(f^2)$ puisque $t \in \text{Im}(f)$, ce qui prouve bien que $u \in \text{Im}(f^2)$, et donc que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

3. Il faut et il suffit donc que $\ker(f^2) = \ker(f)$ et que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

4. Supposons dans un premier temps que $f \circ g$ est un automorphisme, alors $f \circ g$ est surjective, donc $\text{Im}(f \circ g) = E$, ce qui implique que $\text{Im}(f) = E$ (l'image de $f$ est toujours incluse dans celle de $g \circ f$), donc $f$ est bien surjective. De même, l'injectivité de $f \circ g$ implique celle de $g$ puisque $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$ de façon évidente. Montrons enfin que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$. Supposons

dans un premier temps que $u \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(g)$, alors $u = g(v)$ pour un certain vecteur $v \in E$, et $f(u) = 0$, mais cela siginifie que $f \circ g(v) = 0$, et donc que $v$ lui-même est nul par bijectivité de $f \circ g$. On en déduit $u = g(v) = 0$, ce qui prouve que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$. Soit maintenant $u$ un vecteur quelconque de $E$, et notons $h$ la réciproque de l'application $f \circ g$, on peut alors écrire $u = u - g(h(f(u))) + g(h(f(u)))$. Oui, c'est un peu tordu. Manifestement, $g(h(f(u)))$ est un élément de $\mathrm{Im}(g)$. De plus, $f(u - g(h(f(u)))) = f(u) - (f \circ g)(h(f(u))) = f(u) - f(u) = 0$ puisque par définition de $h$ on a $f \circ g \circ h = id$. On en déduit que $u - g(h(f(u))) \in \ker(f)$, et on a obtenu une décomposition de $u$ dans $\ker(f) + \mathrm{Im}(g)$, ce qui prouve la supplémentarité de ces deux espaces.

Démontrons désormais la réciproque en supposant $f$ surjective, $g$ injective et $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ supplémentaires. Si $u \in \ker(f \circ g)$, on a donc $g(u) \in \ker(f)$. Mais par ailleurs $g(u) \in \mathrm{Im}(g)$, donc $g(u) = 0$ puisque les deux sev sont supplémentaires. L'application $g$ étant injective, on en déduit $u = 0$, ce qui prouve l'injectivité de $f \circ g$. De plus, si $u \in E$, comme $f$ est surjective, on peut écrire $u = f(v)$. Le vecteur $v$ lui-même peut être décomposé en $w = z$, avec $w \in \ker(f)$ et $z \in \mathrm{Im}(g)$. Mais en fait, $u = f(v) = f(w + z) = f(z)$ puisque $w \in \ker(f)$. Comme $z \in \mathrm{Im}(g)$, on a bien $u \in \mathrm{Im}(f \circ g)$, ce qui prouve la surjectivité de $f \circ g$, qui est donc un automorphisme de $E$.

## Exercice 6 (*)

Pour se simplifier la vie, écrivons l'application sous forme matricielle : en notant $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $f(x, y, z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (quitte à noter les vecteurs en colonne plutôt qu'en ligne). Calculons $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$, ce qui prouve que $p \circ p = p$ (puisque $p^2(x, y, z) = A^2(x, y, z)$), et donc que $p$ est un projecteur. Pour déterminer son noyau, on résout le système (en multipliant tout par 3) : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$. La somme des deux dernières équations donne la même chose que la première, le système ne sera pas de Cramer (sans surprise pour un projecteur). En soustrayant ces deux mêmes équations, $3y - 3z = 0$, donc $y = z$. On reporte alors dans la première pour trouver $2x + 2y = 0$, soit $y = -x$, donc $\ker(p) = \{(x, -x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, -1))$. Pour l'image, plutôt que de calculer comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique, on peut utiliser le fait que les éléments de l'image d'un projecteur sont caractérisés par la condition $p(u) = u$, ou $p(u) - u = 0$. Ici, on se ramène alors au système (en multipliant à nouveau tout par 3) : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$. Les trois équations sont équivalentes, l'image de $p$ est donc le plan d'équation $x = y + z$, ou si on préfère $\mathrm{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

## Exercice 7 (**)

Surtout pas de calculs compliqués pour démontrer la supplémentarité : l'application $\varphi : f \mapsto f(0)$ est de façon évidente une forme linéaire sur $E$, donc $F$ est un hyperplan de $E$. Comme la fonction exponentielle n'appartient par à cette hyperplan (elle ne s'annule pas en 0 !), un résultat du cours affirme que $F$ est supplémentaire de $G = \mathrm{Vect}(exp)$. Pour déterminer l'expression de la projection (qu'on va noter $p$), il faut réussir à décomposer une fonction continue $f$ en somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'un multiple de l'exponentielle. C'est en fait très facile : on écrit $f(x) = f(x) - f(0)e^x + f(0)e^x$. Comme $f(x) - f(0)e^x$ s'annule en 0, c'est la décomposition recherchée, et on pose donc $p(f) = g$, où $g(x) = f(x) - f(0)e^x$. En fait, la décomposition calculée est exatement celle exploitée dans le cours pour démontrer le résultat dont on s'est servis pour la supplémentarité.

## Exercice 8 (***)

1. Il suffit de constater que $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ en faisant commuter $p$ et $q$. D'après la caractérisation des projecteurs, $p \circ q$ est donc un projecteur.
2. Procédons par double inclusion. Soit $x \in \text{Im}(p \circ q)$, donc $x = p \circ q(y)$. Le vecteur $x$ est donc l'image par $p$ de $q(y)$, il appartient à $\text{Im}(p)$. Mais puisque $p$ et $q$ commutent, on peut aussi écrire $x = q \circ (p(y))$, et $x \in \text{Im}(q)$. Ceci prouve que $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, on sait que, pour des projecteurs, on peut le traduire par $p(x) = x$ et $q(x) = x$. Mais alors $p \circ q(x) = p(x) = x$, donc $x \in \text{Im}(p \circ q)$ puisqu'il est laissé stable par $p \circ q$.
3. Procédons de même. Si $x \in \ker(p) + \ker(q)$, alors $x = y + z$, avec $p(y) = q(z) = 0$, donc $p \circ q(x) = p \circ q(y) + p \circ q(z) = q \circ p(y) + 0 = 0$, donc $x \in \ker(p \circ q)$. Réciproquement, si $x \in \ker(p \circ q)$, on peut écrire $x = q(x) + (x - q(x))$, avec $p(q(x)) = 0$ puisque $x \in \ker(p \circ q)$, et $q(x - q(x)) = q(x) - q^2(x) = 0$ puisque $q$ est un projecteur. On vient de prouver que $x \in \ker(p) + \ker(q)$, ce qui achève notre démonstration.
4. Toujours la même méthode : $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$ avec les hypothèses effectuées, donc $p + q$ est bien un projecteur. On a clairement $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \subset \text{Im}(q \circ p)$ (si $p(u) = q(u) = 0$, alors $(p + q)(u) = 0$, prouvons l'inclusion réciproque : si $u \in \ker(q + p)$, alors $q(u) + p(u) = 0$. Composons cette égalité par $p$ pour obtenir $p(q(u)) + p^2(u) = 0$, soit $0 + p(u) = 0$, donc $u \in \ker(p)$. On prouve de même que $u \in \ker(q)$, donc $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$. L'inclusion $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ est elle-aussi évidente, il faut prouver la réciproque (qui ne l'est pas : si $u = p(v) + q(w)$, aucune raison que les vecteurs $v$ et $w$ soient égaux). Supposons donc $u \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, alors $u = p(u) = q(u)$ puisque $p$ et $q$ sont des projecteurs. Mais alors $u = (p + q)\left(\dfrac{u}{2}\right) \in \text{Im}(p + q)$, ce qui achève la démonstration.

## Exercice 9 (**)

1. Si $u \in N_k$, alors $f^k(u) = 0$, donc $f^{k+1}(u) = f(0) = 0$ et $u \in N_{k+1}$. Autrement dit, $N_k \subset N_{k+1}$. De même, si $u \in I_{k+1}$, $u = f^{k+1}(v) = f^k(f(v)) \in I_k$, donc $I_{k+1} \subset I_k$.
2. D'après la question précédente, $\dim(N_k) \leqslant \dim(N_{k+1})$. La suite $(\dim(N_k))$ est donc une suite croissante d'entiers naturels, comme elle ne peut pas prendre une infinité de valeurs (elle est majorée par $\dim(E)$), il existe nécessairement un entier $p$ pour lequel $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$. Ceci combiné à l'inclusion démontrée précédemment prouve que $N_p = N_{p+1}$. Supposons alors, pour un certain entier $i \geqslant 1$, $N_{p+i} \neq N_{p+i+1}$. Cela signifierait l'existence d'un vecteur $u$ tel que $f^{p+i+1}(u) = 0$ mais $f^{p+i}(u) \neq 0$ (l'inclusion dans l'autre sens étant toujours vraie). Mais alors $f^{p+1}(f^i(u)) = 0$ et $f^p(f^i(u)) \neq 0$, donc $f^i(u) \in N_{p+1}$ et $f^i(u) \notin N_p$, ce qui contredit l'égalité de ces deux noyaux. La suite est donc constante à partir du rang $p$.
3. En appliquant le théorème du rang, quel que soit l'entier $p$, $\dim(I_{p+i+1}) = \dim(E) - \dim(N_{p+i+1}) = \dim(E) - \dim(N_{p+i}) = \dim(I_{p+i})$. Au vu de l'inclusion démontrée à la première question, $I_{p+i} = I_{p+i+1}$, donc la suite $(I_k)$ stationne aussi à partir du rang $p$.
4. D'après le théorème du rang, la somme des dimensions de $N_p$ et de $I_p$ est égale à la dimension de $E$, il suffit donc de prouver que leur intersection est réduite à 0. Supposons donc $u \in N_p \cap I_p$. On peut donc écrire $u = f^p(v)$, avec $f^p(u) = 0$. En découle que $f^{2p}(v) = 0$, soit $v \in N_{2p} = N_p$, donc $f^p(v) = u = 0$. C'est suffisant pour affirmer que $N_p \oplus I_p = E$.

## Exercice 10 (***)

1. Commençons par prouver que $f(\mathbb{C}_3[X]) \subset \mathbb{C}_3[X]$. En effet, on sait que lors d'une division euclidienne, le degré du reste est toujours strictement inférieur à celui du dividende. Ici, $B$ étant de degré 4, $f(P)$ sera de degré inférieur ou égal à 3 quel que soit le polynôme $P$ (peu importe d'ailleurs que $P$ appartienne à $\mathbb{C}_3[X]$). Reste à prouver que l'application est linéaire, ce qui n'est pour une fois pas évident. Soient donc deux polynômes $P_1$ et $P_2$, alors si on effectue la division euclidienne de $AP_1$ et de $AP_2$ par $B$, on obtient les égalités $AP_1 = BQ_1+R_1$, et $AP_2 = BQ_2+R_2$. On peut effectuer la combinaison de ces deux équations : $A(\lambda P_1+\mu P_2) = B(\lambda Q_1+\mu Q_2)+(\lambda R_1+\mu R_2)$. Comme $d^\circ(\lambda R_1+\mu R_2) \leqslant \max(d^\circ(R_1), d^\circ(R_2)) < 4$, on tient nécessairement la division euclidienne de $A(\lambda P_1+\mu P_2)$ par $B$, donc $f(\lambda P_1+\mu P_2) = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$. L'application est linéaire, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. On peut caractériser les polynômes du noyau par la condition $AP$ est divisble par $B$, mais ce n'est pas pratique à expliciter. Mieux vaut expliciter en calculant les images des polynômes de la base canonique : comme $A = B + X - 1$, $f(1) = X - 1$ ; de même $AX = BX + X^2 - X$, donc $f(X) = X^2 - X$ puis $f(X^2) = X^3 - X^2$. Un tout petit peu plus de réflexion pour la dernière : $AX^3 = BX^3 + X^4 - X^3 = BX^3 + (X^4 - X) + X - X^3 + B(X^3 + 1) + X - X^3$ donc $f(X^3) = X - X^3$. Cherchons maintenant le noyau : si $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, alors $f(P) = -a + (a - b + d)X + (b - c)X^2 + (c - d)X^3$, donc $P$ appartient au noyau si $b = c = d$ (à cause des deux derniers coefficients) et $a = 0$ (premier coefficient). La deuxième équation est alors toujours vérifiée, donc $\ker(f) = \{bX + bX^2 + bX^3\} = \mathrm{Vect}(X + X^2 + X^3)$.
3. Puisque $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathbb{C}_3[X]) = 4$, le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Comme l'image de $f$ contient $X - 1$, $X^2 - X = X(X - 1)$ et $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$ (qui sont images de trois des polynômes de la base canonique), elle contient tous les polynômes de la forme $(X - 1)(a + bX + cX^2)$, donc $(X - 1)\mathbb{C}_2[X]$. Comme ce dernier espace est de dimension 3 comme $\mathrm{Im}(f)$, il y a nécessairement égalité entre les deux.
4. Ah tiens, un peu de révision sur les complexes. Il faut donc résoudre l'équation $X^4 - X = 0$, soit $X(X^3 - 1) = 0$. les quatre racines sont $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_4 = \overline{j} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ (les trois dernières étant les racines cubiques de l'unité).
5. Écrivons les quatre polynômes : $P_1 = X^3 - 1$, $P_2 = X(X^2 + X + 1) = X^3 + X^2 + X$, $P_3 = X(X - 1)(X - \overline{j}) = X^3 + jX^2 + \overline{j}X$ et $P_4 = X(X - 1)(X - j) = X^3 + \overline{j}X^2 + jX$. Pour prouver que c'est une base, supposons $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = 0$, et profitons du fait que ces polynômes ont des racines en commun. Pour $x = 0$, l'équation devient $-a = 0$, ce qui implique $a = 0$, pour $x = 1$, on trouve $3b = 0$, donc $b = 0$, pour $x = j$, $cj(j - 1)(j - \overline{j}) = 0$ donc $c = 0$, de même pour $d = 0$, la famille est donc libre. Comme elle contient quatre polynômes, c'est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. On peut ruser pour s'éviter de pénibles calculs : $A = B + X - 1$, et $(X - z_k)P_k = B$, donc $AP_k = BP_k + (X - 1)P_k = BP_k + (X - z_k)P_k + (z_k - 1)P_k = B(P_k + 1) + (z_k - 1)P_k$. On a sous les yeux la division euclidienne de $AP_k$ par $B$, donc $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$. Pour détailler un peu plus, $f(P_1) = -P_1$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = (j - 1)P_3$ et $f(P_4) = (\overline{j} - 1)P_4$.

## Exercice 11 (**)

1. Supposons par exemple que $u \in \ker(f)$, alors $f(u) = 0$ donc $h \circ f(u) = 0$, ce qui revient à dire que $u \in \ker(g)$ avec les hypothèses effectuées. On montre de même toutes les autres implications qui prouvent l'égalité des trois noyaux (les trois applications jouent de toute façon un rôle symétrique dans cet énoncé). Supposons maintenant $u \in \mathrm{Im}(f)$, donc $u = f(v)$. Comme $g \circ h = f$, on a alors $u = g(h(v))$, donc $u \in \mathrm{Im}(g)$. Là encore, les autres implications se démontrent de façon identique, et les trois images sont donc bien égales.

2. En jouant avec les hypothèses, $f^2 = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h^2$, puis $f^3 = h \circ (h \circ f) = h \circ g$. On continue : $f^5 = f^3 \circ f^2 = h \circ g \circ h^2 = h \circ f \circ h = g \circ h = f$. Il y a plein d'autres façons d'arriver au même résultat. Bien sûr, on montrerait de façon similaire que $g^5 = g$ et $h^5 = h$.
3. Supposons $u \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $f(u) = 0$ et $u = f(v)$ pour un certain vecteur $v$. Mais alors $f^5(v) = f^4(u) = 0$, donc $f(v) = 0$ en exploitant le résultat de la question précédente. On a donc $u = 0$, ce qui prouve que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. De plus, tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire sous la forme $u = u - f^4(u) + f^4(u)$, avec bien entendu $f^4(u) \in \mathrm{Im}(f)$ (c'est l'image par $f$ du vecteur $f^3(u)$) et $f(u - f^4(u)) = f(u) - f^5(u) = 0$, donc $u - f^4(u) \in \ker(f)$, ce qui prouve bien que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$. Le noyau et l'image de $f$ sont donc supplémentaires.

## Exercice 12 (**)

Note : un bug de notation dans l'énoncé, le $\mathcal{E}$ devrait être un $\mathcal{L}(E)$.

1. Si le noyau était réduit à 0, l'application serait injective, donc bijective, donc $f^k$ aussi, quelle que soit la valeur de l'entier $k$. C'est fort contradictoire avec le fait que $f$ soit nilpotente. Comme $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$, la théorème du rang assure que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1$.
2. S'il n'existait pas un tel $x$, $f^{p-1}$ serait l'application nulle, ce qui est contradictoire avec la minimalité de $p$. Naturellement, le $q$ apparaissant ensuite dans l'énoncé doit être remplacé par un $p$. Si la famille n'est pas libre, on peut écrire $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$. En composant par $f^{p-1}$, et en utilisant que $f^k(x) = 0$ dès que $k \geqslant p$, on en déduit que $\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$ (tous les autres termes s'annulent). Comme $f^{p-1}(x) \neq 0$, on doit avoir $\lambda_0 = 0$. On peut répéter l'opération en composant par $f^{p-2}$ pour montrer que $\lambda_1 = 0$, puis de même pour tous les autres coefficients, et aboutir à la conclusion que la famille est libre.
3. Une famille libre dans un espace de dimension $n$ étant toujours de cardinal inférieur ou égal à $n$, on a en effet $p \leqslant n$. Du coup, $f^n = 0$ puisque toutes les puissances de $f$ à partir de $f^p$ sont nulles.
4. Si $p = n$, la famille construite précédemment est une base de $E$. Si $g$ est une application linéaire commutant avec $f$, $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)$ (même si $g$ ne commute pas avec $f$, c'est vrai !). Calculons alors, en exploitant la commutation, les images des autres vecteurs de la base construite : $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^n(x) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f(f(x)) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(f(x))$. De même, quelle que soit $i \leqslant n-1$, $g(f^i(x)) = f^i(g(x)) = f^i(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_0 f^i(x) + \lambda_1 f(f^i(x)) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(f^i(x))$. autrement dit, $g$ coïncide sur tous les vecteurs de notre base avec $\lambda_0\, id + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}$. Les deux applications linéaires sont alors égales (un morphisme est toujours uniquement déterminé par l'image d'une base), et $g$ est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ en l'pplication $f$. réciproquement, tous les polynômes constitués à partir de $f$ commutent évidemment avec $f$. Notons que l'ensemble des applications linéaires commutant avec $f$ est ici de dimension $n$ (la même que celle de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$), sachant que l'ensemble de tous les endomorphismes de $E$ est lui de dimension $n^2$.

## Exercice 13 (**)

1. Si $P \in E$, on sait que $d^\circ(P) \leqslant 2$, donc $d^\circ(P') \leqslant 1$, et $d^\circ((X-1)P') \leqslant 2$. Quand on soustrait deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2, le résultat l'est aussi, ce qui prouve que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. La linéarité étant essentiellement triviale : $\varphi(\lambda P + Q) = 2(\lambda P + Q) - (X-1)(\lambda P' + Q') = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$, donc $\varphi$ est bien un endomorphisme de $E$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$, alors $\varphi(P) = 2aX^2 + 2bX + 2c - (X-1)(2aX + b) = 2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX^2 + 2aX - bX + b = (b + 2a)X + 2c + b$. Ce polynôme est nul si et seulement si $b + 2a = 2c + b = 0$, soit $c = a = -\dfrac{b}{2}$. On en déduit que $\ker(\varphi) =$

$\left\{P = -\frac{b}{2}X^2 + bX - \frac{b}{2}\right\} = \mathrm{Vect}(X^2 - 2X + 1)$. Notre application n'est pas injective puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

3. On peut comme d'habitude calculer les images des polynômes de la base canoniques : $\varphi(1) = 2$, $\varphi(X) = 2X - (X-1) = X + 1$ et enfin $\varphi(X^2) = 2X^2 - 2X(X-1) = 2X$. On peut alors dire que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(2, X+1, 2X) = \mathrm{Vect}(2, 2X) = \mathrm{Vect}(1, X)$.
4. Il est essentiellement évident que $\ker(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ (les polynômes de l'image sont tous de degré inférieur ou égal à 1, alors que ceux du noyau (hormis le polynôme nul) sont de degré 2. Puisque les dimensions respectives du noyau et de l'image sont de 1 et de 2, et que $\dim(E) = 3$, cela suffit à prouver la supplémentarité.
5. Inutile de faire des calculs : puisque $p$ est une projection sur $\ker(\varphi)$), on aura, $\forall x \in E$, $p(x) \in \ker(\varphi)$, et donc $\varphi(p(x)) = 0$. Autrement dit, $\varphi \circ p = 0$. Dans l'autre sens, on a, par définition de l'image, $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \mathrm{Im}(\varphi)$. Or, $\mathrm{Im}(\varphi) = \ker(p)$ puisque $p$ est un projecteur de direction $\mathrm{Im}(\varphi)$. On en déduit qu'on a également $p \circ \varphi = 0$.

## Exercice 14 (*)

1. C'est essentiellement évident : $\varphi(\lambda z + z') = \frac{1}{2}(\lambda z + z') + \frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + \bar{z'})$, puisque $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Calculons donc $\varphi(\varphi(z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{z} - \frac{i}{2}z\right)$ puisque $\bar{i} = -i$. Il ne reste plus qu'à regrouper pour constater que $\varphi(\varphi(z)) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} = \varphi(z)$, ce qui prouve que $\varphi$ est un projecteur.
3. Pour le noyau, on peut revenir à la forme algébrique $z = a + ib$ : $\varphi(a + ib) = \frac{a}{2} + \frac{ib}{2} + \frac{ia}{2} + \frac{b}{2}$, qui est nul si et seulement si $a + b = 0$ (la partie réelle et la partie imaginaire de notre image étant identiques), soit $b = -a$. Autrement dit, $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - i)$. Pour l'image, on calcule simplement les images des deux vecteurs de la base canonique : $\varphi(1) = \frac{1+i}{2}$, et $\varphi(i) = \frac{i+1}{2}$. On a donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 + i)$. L'image et le noyau sont tous deux de dimension 1.

## Exercice 15 (**)

1. La normalisation impose de résoudre l'équation $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}$ séparément sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si on se place par exemple sur $]0, +\infty[$, l'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{\ln(x)} = Kx$, et pour solution particulière évidente $y_p(x) = 1$. Les solutions de l'équation sont donc de la forme $y(x) = Kx + 1$. Il est très facile de constater que sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont de la forme $y(x) = Lx + 1$, et surtout de voir que toutes les fonction $y : x \mapsto Kx + 1$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. C'est trivial : $f(P)$ est un polynôme, et $f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q - \lambda P'X - XQ' = \lambda f(P) + f(Q)$.
3. On a déjà résolu plus haut l'équation $y - xy' = 0$ dans l'espace vectoriel de toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, qui contient très largement tous les polynômes. Ce qui tombe bien, c'est que les solutions étaient justement des polynômes, qui sont donc les éléments du noyau de $\varphi$. Autrement dit, $\ker(f) = \{KX \mid K \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X)$.
4. C'est un peu moins évident, mais on peut en fait constater que $X$ n'est l'image de personne par l'application $f$. En effet, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $XP' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$, puis $f(P) = \sum_{k=0}^{n}(1 - k)a_k X^k$, qui ne comporte jamais de terme non nul de degré 1. En fait, l'image de $f$ est

constituée de tous les polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_1 = 0$ (ce qui constitue pour les curieux un hyperplan de $E$.

5. L'application $f$ n'étant pas injective, $f \circ f$ ne peut pas non plus l'être (les éléments du noyau de $f$ sont aussi dans celui de $f \circ f$). Elle ne peut pas plus être surjective, le polynôme $X$ n'appartenant pas à l'image de $f \circ f$, sinon on pourrait écrire $X = f(f(P))$ pour un certain polynôme $P$, donc $X = f(Q)$, avec $Q = f(P)$. On aurait alors $X \in \text{Im}(f)$, ce qui est absurde.
   Pour déterminer le noyau de $P$, comme on ne sait pas résoudre l'équation différentielle associée, utilisons le fait que, si $f \circ f(P) = 0$, alors $f(P) = KX$, pour un certain réel $K$. Or, on a vu plus haut que les polynômes de la forme $KX$ n'appartenaient justement pas à l'image de $f$, donc n'admettent aucun antécédent ! Seul cas particulier, quand $K = 0$, où les antécédents sont tout simplement les éléments du noyau de $f$. Bref, $\ker(f \circ f) = \ker(f) = \text{Vect}(X)$.

## Exercice 16 (***)

1. Calculons $f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = (2\lambda y + 2\mu y' - 2\lambda z - 2\mu z', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' - 2\lambda z - 2\mu z', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \lambda y') = \lambda(2y - 2z, x + y - 2z, x - y) + \mu(2y' - 2z', x' + y' - 2z', x' - y') = \lambda f(x,y,z) + \mu f(x',y',z')$. L'application $f$ est bien une application linéaire.

2. Le noyau est constitué des triplets solutions du système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$. Les équations extrêmes donnent immédiatement $x = y = z$, en reportant dans la deuxième on trouve alors $0 = 0$ qui est toujours vérifié donc $\ker(f) = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,1))$.
   Pour l'image, on peut calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ : $f(1,0,0) = (0,1,1)$ ; $f(0,1,0) = (2,1,-1)$ et $f(0,0,1) = (-2,-2,0)$. Comme $(2,1,-1) = -(-2,-2,0) - (0,1,1)$, on peut l'oublier et conclure que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0,1,1),(-2,-2,0)) = \text{Vect}((0,1,1),(1,1,0))$. L'application n'est donc pas injective (le noyau contient d'autres vecteurs que le vecteur nul) ni surjective (le vecteur $(1,0,0)$ par exemple n'appartient pas à l'image, on ne peut pas l'écrire comme combinaison linéaire de $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$). A fortiori, $f$ n'est pas bijective.

3. Commençons par prouver que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Soit donc un vecteur $u$ appartenant à la fois à $\ker(f)$ et à $\text{Im}(f)$. On peut alors écrire $u$, d'une part sous la forme $(x,x,x)$ pour un certain réel $x$, d'autre part comme combinaison linéaire $a(0,1,1) + b(1,1,0) = (b, a+b, a)$. On doit donc avoir à la fois $x = a$, $x = b$ et $x = a + b$, ce qui n'est possible que si $x = a = b = 0$, soit $u = 0$.
   Montrons maintenant que $\ker(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Soit donc $u = (x,y,z)$, on cherche trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $u = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1)$, ce qui se traduit par le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & x \\ a & + & b & + & c & = & y \\ a & & & + & c & = & z \end{array} \right.$. En soustrayant la première et la troisième ligne du système à la deuxième, on obtient immédiatement $c = y - x$ et $b = y - z$. Ensuite, $a = x - b = x - y + z$. On peut donc écrire n'importe quel vecteur de l'espace comme somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image de $f$. ces deux sous-espaces sont bien supplémentaires.

4. La question précédente nous permet d'affirmer que $(x,y,z) = (x - y + z)(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (y - x)(0,0,1)$, avec le premier terme de la somme de droite appartenant à $\ker(f)$, et les deux suivants à $\text{Im}(f)$. La projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$ donne donc $p(x,y,z) = (y - z)(1,1,0) + (y - x)(0,1,1) = (y - z, 2y - x - z, y - x)$. On vérifie facilement si on le souhaite que $p^2 = p$.

5. Calculons donc : $f^2(x,y,z) = f(f(x,y,z)) = (2(x+y-2z) - 2(x-y), 2y - 2z + x + y - 2z - 2(x - y), 2y - 2z - x - y + 2z) = (4y - 4z, -x + 5y - 4z, -x + y)$ ; puis $f^3(x,y,z) = (2(-x + 5y - 4z) -$

$2(-x+y), 4y-4z-x+5y-4z-2(-x+y), 4y-4z+x-5y+4z) = (8y-8z, x+7y-8z, x-y)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f^3(x,y,z)-f^2(x,y,z)+2f(x,y,z) = (8y-8z, x+7y-8z, x-y) - (4y-4z, -x+5y-4z, -x+y) - (4y-4z, 2x+2y-4z, 2x-2y) = (0,0,0)$, ce qui est vrai.

6. Calculons $r \circ r = \frac{1}{36}(f^2+f) \circ (f^2+f) = \frac{1}{36}(f^4+2f^3+f^2)$, Comme $f^3 = f^2+2f$, $f^4 = f \circ (f^2+2f) = f^3+2f^2 = 3f^2+2f$, et $r^2 = \frac{1}{36}(3f^2+2f+2f^2+4f+f^2) = \frac{1}{36}(6f^2+6f) = \frac{1}{6}(f^2+f) = r$, donc $r$ est un projecteur. De même, $s^2 = \frac{1}{9}(f^2-2f)\circ(f^2-2f) = \frac{1}{9}(f^4-4f^3+4f^2) = \frac{1}{9}(3f^2+2f-4f^2-8f+4f^2) = \frac{1}{9}(3f^2-6f) = \frac{1}{3}(f^2-2f) = s$, donc $s$ est également un projecteur. De plus, $f \circ r = \frac{1}{6}(f^3+f^2) = \frac{1}{6}(2f^2+2f) = \frac{2}{6}(f^2+f) = 2r$, et $f \circ s = \frac{1}{3}(f^3-2f^2) = \frac{1}{3}(-f^2+2f) = -s$.
7. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : f^n = 2^n r + (-1)^n s$. Au rang 1, on a $2r - s = \frac{1}{3}(f^2+f) - \frac{1}{3}(f^2-2f) = \frac{1}{3}(3f) = f$, donc $P_1$ est vraie. Supposons que $P_n$ est vraie, alors d'après les résultats de la question précédente, $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (2^n r + (-1)^n s) = 2^n f \circ r + (-1)^n f \circ s = 2^{n+1} r + (-1)^{n+1} s$. On en déduit que $f^n = \frac{2^n}{6}(f^2+f) + \frac{(-1)^n}{3}(f^2-2f) = \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3} f^2 + \frac{2^{n-1}-2(-1)^n}{3} f$, soit $f^n(x,y,z) = \frac{1}{3}((2^{n-1}+(-1)^n)(4y-4z)+(2^{n-1}-2(-1)^n)(2y-2z), \dots)$, qu'on peut simplifier si on a du temps à perdre.

## Exercice 17 (**)

1. (a) Résolvons donc le petit système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & & & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$. On a bien sûr intérêt à procéder par susbtitution ici : $z = x$ et $y = -x$, donc la deuxième équation devient $3x - x - 2x = 0$, qui est manifestement toujours vérifiée. On en déduit que $\ker(f) = \{(x,-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$. Ce noyau est de dimension 1.
   (b) Le théorème du rang nous permet de savoir que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Pour calculer l'image, on calcule comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1,3,1),(0,1,1),(1,-2,0))$. Puisque l'image doit être de dimension 2, c'est sans surprise qu'on constate que $(-1,3,1) = (0,1,1) - (1,-2,0)$. On peut donc écrire plus simplement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,-2,0))$.
   (c) En posant $X = z - x$, $Y = 3x + y - 2z$ et $Z = x + y$, on doit donc calculer $f \circ f(x,y,z) = f(X,Y,Z) = (Z - X, 3X + Y - 2Z, X + Y) = (2x + y - z, -2x - y + z, 2x + y + z)$.
   (d) Un vecteur $u(x,y,z)$ appartient à $\ker(f^2)$ si et seulement si $2x + y - z = 0$ (les trois équations sont équivalentes), donc si $z = 2x+y$. Autrement dit, $\ker(f^2) = \mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$. On remarque que le vecteur $(0,1,1)$ est commun aux bases obtenues pour $\ker(f^2)$ et pour $\mathrm{Im}(f)$. De plus, $(1,0,2) = (1,-2,0) + 2 \times (0,1,1)$, donc $(1,0,2) \in \mathrm{Im}(f)$, ce qui prouve que $\ker(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Les deux espaces étant de dimension 2 (les deux vecteurs obtenus pour former la famille génératrice de $\ker(f^2)$ ne sont pas proportionnels), ils sont nécessairement égaux.
   (e) Soit $u \in \mathbb{R}^3$, alors $f(u) \in \mathrm{Im}(f)$ (c'est évident !), et donc, d'après la question précédente, $f(u) \in \ker(f^2)$. Autrement dit, $f^2(f(u)) = 0$, soit $f^3(u) = 0$. Tout vecteur a donc une image nulle par $f^3$, on a bien $f^3 = 0$, et $f$ est donc nilpotent.
2. (a) Le fait que $f$ est un endomorphisme est complètement évident. En fait, sa nilpotence aussi : $f^2(x,y,z,t) = f(0,x,y,z) = (0,0,x,y)$, puis $f^3(x,y,z,t) = (0,0,0,x)$ et $f^4 = 0$.

(b) Il suffit de poser $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. La nilpotence est à nouveau logique : $f^k(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{n-k})$, jusqu'à avoir $f^n = 0$.

3. (a) Le polynôme $Q$ est clairement de degré au maximum 2 si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ (comme on va le voir, il est même de degré plus petit que ça). Vérifions la linéarité : si $P_1$ et $P_2$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X) = \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - \lambda P_1(X) - P_2(X) = \lambda f(P_1) - f(P_2)$. Aucun problème, $f$ est bien un endomorphisme.

(b) Soyons bourrins et posons $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $f(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - (aX^2 + bX + c) = aX^2 + 2aX + a + bX + b + c - aX^2 - bX - c = 2aX + a + b$. Le polynôme $P$ appartient donc au noyau de $f$ si $2a = a + b = 0$, autrement dit si $P$ est un polynôme constant. On peut écrire $\ker(f) = \text{Vect}(1)$, et le noyau est bien sûr de dimension 1. L'image sera donc de dimension 2. Or, le calcul précédent prouve qu'on a toujours $f(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Comme cet espace est lui-même de dimension 2, on en déduit immédiatement que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$. Noyau et images ne sont pas supplémentaires, les polynômes constants appartenant aux deux.

(c) On calcule facilement (avec les mêmes notations que précédemment) $f^2(P) = 2aX + 2a + a + b - 2aX - a - b = 2a$, puis $f^3(P) = 0$ puisque $f^2(P)$ est toujours un polynôme constant.

(d) Oui, bien sûr, puisque l'image d'un polynôme de degré $n$ sera toujours un polynôme de degré $n-1$ (le terme dominant de $(X+1)^n$ va s'annuler avec celui de $P(X)$ dans le calcul de $f(P)$). Par une récurrence évidente, $f^k(P)$ sera de degré $n-k$, et on aura donc toujours $f^{n+1} = 0$.

## Exercice 18 (**)

1. L'application $f$ est certainement à valeurs dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, et en notant $a'$, $b'$, $c'$ et $d'$ les quatre coefficients d'une matrice $N$, on aura $f(\lambda M + N) = \dfrac{\lambda a + a' + \lambda d + d'}{2} I + \dfrac{\lambda b + b' + \lambda c + c'}{2} J = \lambda f(M) + f(N)$.

2. Un calcul trivial donne $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}$, donc $M$ appartient au noyau de $f$ si et seulement si $a+d = b+c = 0$, soit $d = -a$ et $c = -b$. Le noyau est donc constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, soit $\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, la dimension de ce noyau est égale à 2 (les deux matrices de notre Vect ne sont clairement pas proportionnelles). Le théorème du rang assure que l'image de $f$ sera aussi de dimension 2. Or, $\Im(f) \subset \text{Vect}(I, J)$ puisque par définition $f(M)$ est toujours une combinaison linéaire des deux matrices $I$ et $J$. Comme ces deux matrices ne sont pas proportionnelles, $\dim(\text{Vect}(I, J)) = 2$, et on a donc nécessairement $\text{Im}(f) = \text{Vect}(I, J)$.

3. Pour déterminer $\ker(f - id)$, on résout l'équation $f(M) = M$, qui donne les équations $a = d = \dfrac{a+d}{2}$ et $b = c = \dfrac{b+c}{2}$. Remarquons que $a = d \Rightarrow \dfrac{a+d}{2} = a$ (et de même pour $b$ et $c$), donc les conditions $a = d$ et $b = c$ suffisent en fait, ce qui revient à dire que les matrices appartenant à $\ker(f - id)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, ce qui correspond exactement aux combinaisons linéaires des matrices $I$ et $J$. On vient donc de constater que $\ker(f - id) = \text{Im}(f)$.

4. Puisque $f(I) = I$ et $f(J) = J$, on a simplement $f(f(M)) = \dfrac{a+d}{2} f(I) + \dfrac{b+c}{2} f(J) = \dfrac{a+d}{2} I + \dfrac{b+c}{2} J = f(M)$, ce qui prouve que $f \circ f = f$, et donc que $f$ est un projecteur.

5. On sait que $s = 2f - id$, donc $s(M) = (a+d)I + (b+c)J - M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. Il est très facile ici de vérifier que cette application vérifie $s \circ s = id$.

## Exercice 19 (***)

1. L'application $f$ va évidemment de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. En notant $u(x,y,z)$ et $u'(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on calcule péniblement $f(\lambda u+v) = (\lambda x+x'-\lambda y-y'+\lambda z+z', -\lambda x-x'+3\lambda y+3y'-2\lambda z-2z', -2\lambda x-2x'+6\lambda y+6y'-4\lambda z-4z') = \lambda(x-y+z, -x+3y-2z, -2x+6y-4z)+(x'-y'+z', -x'+3y'-2z', -2x'+6y'-4z') = \lambda f(u)+f(v)$, donc l'application $f$ est linéaire, et c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations du système étant manifestement équivalentes, on remplace simplement $y = x+z$ dans la deuxième équation pour obtenir $-x+3x+3x-2z = 0$, soit $z = -2x$, donc on déduit $y = -x$. Autrement dit, $\ker(f) = \{(x,-x,-2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,-2))$. La famille contituée de l'unique vecteur $(1,-1,-2)$ est bien entendu une base de ce noyau.
3. Le noyau de $f$ étant de dimension 1, le théorème du rang assure que son image sera de dimension 2. On sait par ailleurs que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))$ $= \mathrm{Vect}((1,-1,-2),(-1,3,6),(1,-2,-4))$. Connaissant déjà sa dimension, il doit y avoir une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs. En effet, $(1,-1,-2)-(-1,3,6) = 2\times(1,-2,-4)$ (on peut bien sûr écrire un système pour vérifier que la famille n'est pas libre et retrouver cette relation). On se contentera donc d'écrire $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,-2),(-1,3,6))$, et ces deux vecteurs restants forment une base de notre image.
4. Manifestement, $(1,-1,-2) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,-2)) \subset \mathrm{Im}(f)$. Les deux espaces ne sont certainement pas égaux puisqu'ils n'ont pas la même dimension (et qu'il existe des vecteurs de l'image qui n'appartiennent pas au noyau).
5. On a déjà calculé $v = f(u) = (-1,3,6)$, reste à calculer $w = f(-1,3,6) = (-2,-2,4)$. La famille $(u,v,w)$ étant une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est génératrice pour qu'il s'agisse d'une base de $\mathbb{R}^3$ (la liberté est plus facile à prouver mais moins utile pour la suite de l'exercice). Soit donc $t = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, cherchons trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $t = au+bv+cw$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & b & - & 2c & = & x \\ a & + & 3b & - & 2c & = & y \\ & & 6b & + & 4c & = & z \end{array}\right.$. L'opération $2L_1+L_3$ donne $4b = 2x+z$, donc $b = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}z$. On en déduit $c = -\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}z$, puis $a = y-3b+2c = -3x+y-z$. Le système ayant toujours une (unique) solution, notre famille est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Il suffit dans les calculs précédents de fixer les valeurs de $x$, $y$ et $z$ égales à 1 en annulant les deux autres coordonnées, pour trouver $(1,0,0) = \left(-3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)_{\mathcal{B}}$, $(0,1,0) = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$ (ce qui n'est pas une surprise, c'est effectivement le vecteur $v$), et enfin $(0,0,1) = \left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)_{\mathcal{B}}$. Ces calculs n'ont absolument aucun intérêt.
7. On constate assez facilement que $f(w) = 0$ (en effet, $w$ est proportionnel au vecteur $(1,-1,-2)$), dont on déduit $f^3(u) = f^2(v) = f(w) = 0$, puis $f^3(v) = f(0) = 0$ et enfin $f^3(w) = f^2(0) = 0$. Finalement, l'application $f$ s'annule sur trois vecteurs formant une base de $\mathbb{R}^3$, il s'agit nécessairement de l'application nulle.
8. On peut composer : $g^2 = (f+3\,id)^2 = f^2+6f+9\,id$, puis $g^3 = (f+3\,id)^3 = f^3+9f^2+27f+27\,id = 9f^2+27f+27\,id$ puisque $f^3 = 0$. Les calculs s'effectuent en développant tout simplement comme un produit puisque la composition est distributive par rapport à l'addition (et qu'ici $f$ et $id$ commutent évidemment). Plus généralement, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : $g^n = (f+3\,id)^n = 3^n\,id + n3^{n-1}f + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}f^2$ (les termes suivant étant tous nuls).

9. Le « sans aucun calcul » est un peu exagéré : avec un tout petit peu d'astuce, $g^3 = 9f^2+27f+27\,id = 9(f^2+6f+9\,id)-27f-54\,id = 9g^2-27(f+2\,id) = 9g^2-27(g-id) = 9g^2-27g+27\,id$. On a donc $g^3 - 9g^2 + 27g = -27\,id$, soit $g \circ \left(-\frac{1}{27}g^2 + \frac{1}{3}g - id\right) = id$, ce qui prouve d'un seul coup que $g$ est un automorphisme et que $g^{-1} = -\frac{1}{27}g^2 + \frac{1}{3}g - id$ (on ne cherchera bien sûr pas à être plus explicites).

# Problème (***)

## I. Une somme directe intéressante.

1. Comme $f$ et $id$ commutent, on peut calculer $p^2 = \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id\right)^2 = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + +\frac{1}{9}\,id = \frac{2}{9}(f+id) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\,id = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id = p$. L'application $p$ est donc un projecteur.
2. Puisque $p$ est un projecteur, son image est constituée des vecteurs $x$ vérifiant $p(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = x$. On en déduit très facilement que la condition est équivalente à avoir $f(x) = x$.
3. Pour tout vecteur $x$, on peut écrire $p(x) + q(x) = x$. En effet, si on écrit $x$ sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = x_2$ et $q(x) = x_1$, donc $p(x)+q(x) = x_1+x_2 = x$. Autrement dit, $q = id - p$. Comme par ailleurs $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id$ implique $id = 3p - 2f$, on en déduit que $q = 3p - 2f - p = 2p - 2f$.
4. On sait que, $p$ étant un projecteur, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. On a vu à la question 2 que $\mathrm{Im}(p) = \{x \mid f(x) = x\} = \ker(f - id)$. Par ailleurs, $\ker(p) = \mathrm{Im}(q)$. Comme $q$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(q) = \{x \mid q(x) = x\} = \{x \mid 2p(x) - 2f(x) = x\}$. Or, $2p(x) - 2f(x) = \frac{4}{3}f(x) + \frac{2}{3}x - 2f(x)$, donc $2p(x) - 2f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{2}{3}f(x) = \frac{1}{3}x$, ou encore $f(x) = -\frac{1}{2}x$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(q) = \ker\left(f + \frac{1}{2}\,id\right)$, ce qui donne bien l'égalité souhaitée.

## II. Expression des puissances de $f$.

1. Tentons une démonstration par récurrence. Au rang 0, $f^0 = id$ et $p + q = id$ (résultat utilisé plus haut), donc la relation est vraie. Supposons-là vérifiée au rang $n$, alors $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n f \circ q$. Or, $f \circ p = \frac{2}{3}f^2 + \frac{1}{3}f = \frac{1}{3}(f + id) + \frac{1}{3}f = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id = p$ ; et $f \circ q = f \circ (2p - 2f) = 2p - 2f^2 = 2p - f - id$. En utilisant $id = 3p - 2f$, on trouve $f \circ q = -p + f = -\frac{1}{2}(2p - 2f) = -\frac{1}{2}q$. en reportant ces deux égalités dans notre calcul précédent, on trouve $f^{n+1} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} q$, ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est donc valable pour tout entier $n$.
2. Reprenons la relation initiale $f^2 = \frac{1}{2}(f + id)$. On peut l'écrire sous la forme $f \circ \left(f - \frac{1}{2}\,id\right) = \frac{1}{2}\,id$, ou encore $f \circ (2f - id) = id$. L'application $f$ est donc bijective, de réciproque $f^{-1} = 2f - id$.
3. La relation nous donnerait $f^{-1} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} q = p - 2q$. Or, $p - 2q = p - 2(2p - 2f) = 4f - 3p = 4f - 2f - id = 2f - id$. La relation reste donc valable pour $n = -1$. Pour

regarder ce qui se passe pour un $n$ négatif quelconque, on peut refaire une récurrence. On vient de vérifier que, pour $n=-1$, la formule était vraie. Supposons-là au rang $-n$ (si ça vous choque vraiment de faire une récurrence sur des entiers négatifs, vous appelez $Q_n$ la propriété $f^{-n}=p+(-2)^n q$), et calculons $f^{-n-1}=f^{-1}\circ f^{-n}=(2f-id)\circ(p+(-2)^n q)=2f\circ p+(-2)^n(2f\circ q)-p-(-2)^n\circ q$. En utilisant les relations $f\circ p=p$ et $f\circ q=-\dfrac{1}{2}q$, on trouve $f^{-n-1}=2p-(-2)^n q-p-(-2)^n q=p+(-2)^{n+1}q$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Celle-ci reste donc valable pour tous les entiers relatifs.
On pouvait aussi, alternativement, prouver que la formule donnait bien pour $-n$ la réciproque de $f^n$, autrement dit que $\left(p+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q\right)\circ(p+(-2)^n q)=id$. En effet, cette expression se développe en $p^2+(-2^n)p\circ q+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q\circ p+q$. Or, $p\circ q=p\circ(2p-2f)=\left(\dfrac{2}{3}f+\dfrac{1}{3}id\right)\left(-\dfrac{2}{3}f+\dfrac{2}{3}id\right)=-\dfrac{4}{9}f^2+\dfrac{2}{9}f+\dfrac{2}{9}id=0$ puisque $f^2=\dfrac{1}{2}(f+id)$. De même, $q\circ p=0$ (tout celà commute puisqu'on peut tout exprimer en fonction de $f$ et de $id$). Il ne reste donc de notre calcul que $p+q$, qui est bien égal à l'identité.

## III. Un exemple concret.

1. Calculons donc $f\circ f(x,y,z)=\Big(4x-2y-2z-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}z-3x+y+2z,3x-\dfrac{3}{2}y-\dfrac{3}{2}z$ $-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{9}{4}y+\dfrac{3}{4}z-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}y+z,6x-3y-3z-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}z-6x+2y+4z\Big)$ $=\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z,-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}y+\dfrac{1}{4}z,-\dfrac{3}{2}x++\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{2}z\right)$, ce qui correspond bien à $\dfrac{1}{2}(f(x,y,z)+(x,y,z))$ (calcul passionnant).
2. Appartenir à $\ker(f-id)$ est équivalent à vérifier l'équation $f(x)=x$, ce qui nous mène au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & x \\ -\frac{3}{2}x & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & y \\ -3x & + & y & + & 2z & = & z \end{array}\right.$. Quitte à multiplier la deuxième équation par deux, les trois équations se ramènent à $-3x+y+z=0$, soit $z=3x-y$. Autrement dit, $\ker(f-id)=\{(x,y,3x-y)\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}((1,0,3),(0,1,-1))$.
De même, le deuxième noyau se calcule en résolvant $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & -\frac{1}{2}x \\ -\frac{3}{2}x & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2}y \\ -3x & + & y & + & 2z & = & -\frac{1}{2}z \end{array}\right.$.
Multiplions partout par 2 et passons tout à gauche pour obtenir $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ -6x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$.
La différence des deux premières équations donne $2y-z=0$, et $2L_1-L_3$ donne $2y-z=0$ aussi. Sans surprise, le système n'est donc pas de Cramer, on peut exprimer $z=2y$, puis $3x=2y+2z=6y$, donc $x=2y$. Finalement, $\ker\left(f+\dfrac{1}{2}id\right)=\{(2y,y,2y)\mid y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((2,1,2))$.
3. Si on tient vraiment à donner les expression analytiques, $p(x,y,z)=\left(-x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{3}z,-x+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{1}{3}z,-2x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{5}{3}z\right)$, et $q(x,y,z)=(x,y,z)-p(x,y,z)=\left(2x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z,x-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{3}z,2x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z\right)$.
4. D'après les calculs de la deuxième partie, $f^n(x)=p(x)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q(x)$. On va se contenter

d'écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} -1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) \\ -1+(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3}(4-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) \\ -2-(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(5+(-\frac{1}{2})^{n-1}) \end{pmatrix}$ et de dire que $f^n(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$