# Feuille d'exercices n° 27 : fonctions à deux variables.

MPSI Lycée Camille Jullian

42 juin 2022

## Exercice 1 (*)

Soit $r$ un réel strictement positif. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $B_n = B_f\left(\frac{1}{n}, \frac{r}{n}\right)$.

1. À quelle condition sur $r$ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$ ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $r$ pour que $B = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} B_n$ soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 2 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le graphe de $f$, défini par $G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie (si le graphe est fermé, alors la fonction $f$ est-elle nécessairement continue) ?

## Exercice 3 (*)

Montrer qu'une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ peut toujours s'écrire comme une union (nécessairement infinie) de fermés.

## Exercice 4 (*)

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ :

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$.
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$.
3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$.
5. $A_5 = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) \mid (n, p) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$.
6. $A_6 = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

## Exercice 5 (**)

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer (en justifiant) les lignes de niveau $k$ pour les valeurs de $k$ demandées :

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $k = 0$, $k = \dfrac{1}{2}$.
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $k = 0$, $k = 1$.
3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{x + y^2}$, $k = 0$, $k = -1$.

4. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$, $k=2$.
5. $f(x,y) = x-y-|x-y|$, $k=-1$, $k=0$, $k=1$.

## Exercice 6 (**)

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence d'un prolongement par continuité en $(0,0)$ (on pourra notamment exploiter un passage en coordonnées polaires) :

- $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x}$
- $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y} \times \sin(y)$
- $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

La dernière fonction étudiée, une fois prolongée, est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

## Exercice 7 (**)

Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{1+e^{x^2+2y^2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 8 (**)

Soit $f$ une fonction dérivable à une variable, et $F : (x,y) \mapsto f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (définie bien entendu sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$). Montrer que $F$ est solution de l'équation aux dérivées partielles $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$. Montrer de même que $G : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles $x\dfrac{\partial G}{\partial x} + y\dfrac{\partial G}{\partial y} + G = 0$.

## Exercice 9 (*)

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto f(x, f(x,x))$, puis les dérivées partielles de la fonction $F : (x,y) \mapsto f(x, f(x,y))$.

## Exercice 10 (**)

On note $f : (x,y) \mapsto e^{x+y}(x-y+1)$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent de $f$ en $(0,0)$.
2. La fonction $f$ possède-t-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $x = y+z$ ?

## Exercice 11 (***)

Résoudre chacune des équations aux dérivées partielles suivantes en effectuant le changement de variables proposé :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$, avec la condition supplémentaire $f(x,0) = \sin(x)$, en posant $(u,v) = (x+y, x-y)$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=x+y$, avec la condition supplémentaire $f(0,y)=y$, en posant $(x,y)=\left(u,\frac{u^2}{2}+v\right)$.
3. $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $(x,y)=\left(\frac{u}{v},\frac{v^2}{u}\right)$ (résolution sur $]0,+\infty[^2$ pour cette dernière équation).

## Exercice 12 (* à **)

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y)=5x^2-4xy+y^2-6x+2y$.
2. $f_2(x,y)=x^3+y^3-3xy$.
3. $f_3(x,y)=e^{x\sin(y)}$.
4. $f_4(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$.

## Exercice 13 (**)

On considère dans cet exercice la fonction $f:(x,y)\mapsto(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, définie sur $]0,+\infty[^2$.

1. Montrer que $f(x,y)=2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{(x+y)^2}{xy}$.
2. Montrer que $f$ possède une infinité de points critiques, et les déterminer.
3. Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$, et en déduire que $f$ admet un minimum global sur son domaine de définition, atteint en tous ses points critiques.

## Exercice 14 (**)

On pose $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $e^{-x}=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et que cette solution appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right[$.
2. Montrer que $f$ admet un unique point critique $a=(x_0,y_0)$, et que $x_0-e^{-x_0}=0$, et $y_0=\frac{1}{2}x_0$.
3. Montrer que $f(x_0,y_0)=\frac{x_0^2}{2}+x_0$.

## Exercice 15 (**)

On considère la fonction $f$ définie par $f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-x-y$.

1. Calculer les dérivées partielles de $f$.
2. En déduire que $f$ admet un unique point critique, à préciser.
3. Développer $2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2$.
4. En déduire que le point critique de $f$ correspond à un minimum global de la fonction.
5. On note désormais $g:(x,y)\mapsto 2e^{2x}+2e^{2y}+2e^{x+y}-e^x-e^y$. Exploiter les questions précédentes pour montrer que $g$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, et préciser en quel point il est atteint.

## Exercice 16 (**)

Étudier les extrema sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

## Exercice 17 (**)

On note $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$.

1. Expliquer pourquoi $f$ admet nécessairement une borne supérieure sur $\mathbb{R}^2$.
2. En notant $C = [0,\pi]^2$, expliquer pourquoi la borne supérieure de $f$ sur $C$ est la même que sur $\mathbb{R}^2$.
3. On admet l'équivalent à deux variables suivant du théorème du maximum : si $f$ est continue sur un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$, alors elle y atteint un maximum. Montrer alors que $f$ atteint sa borne supérieure, soit sur un des bords du carré $C$, soit en un point critique situé à l'intérieur de $C$.
4. En déduire la valeur du maximum de $f$.

## Exercice 18 (ESCP 1978, j'étais pas né) (**)

On pose $f(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 - x + 2y$.

1. Déterminer les extrema de $f$ (s'il y en a).
2. Calculer $g(x,y) = f\left(x + \dfrac{1}{2}, y - 1\right) + \dfrac{5}{4}$, et montrer que $g(x,y) > 0$ pour tout couple $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Étudier les lignes de niveau de la fonction $g$.

## Problème (**)

On considère l'expérience aléatoire suivante : on demande successivement à $n$ personnes si elles préfèrent les mathématiques, le bridge ou le chocolat au lait. Chaque personne ne donne qu'une seule réponse, et on sait que les mathématiques seront choisies avec une probabilité $p_1$, le bridge avec une probabilité $p_2$ et le chocolat au lait avec une probabilité $p_3$, les trois probabilités étant non nulles et vérifiant bien entendu $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Les réponses données par les $n$ personnes sont bien sûr totalement indépendantes.

On note $X_1$ la variable aléatoire indicatrice de l'évènement « Les mathématiques n'ont été choisies par personne au bout de $n$ sondages », et de même $X_2$ pour le bridge et $X_3$ pour le chocolat, et on pose enfin $X = X_1 + X_2 + X_3$.

1. Que représente la variable $X$ ?
2. Donner la loi des variables $X_i$.
3. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable $X$.
4. On pose désormais $f : (x,y) \mapsto (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$, fonction définie sur l'ouvert $]0,1[^2$ de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{E}(X) = f(p_1, p_2)$.
   (b) Calculer les dérivées partielles de la fonction $f$.
   (c) En déduire l'existence d'un unique point critique pour la fonction $f$.
   (d) Justifier que le point correspondant est un minimum de la fonction $f$.
   (e) Donner la valeur minimale possible pour $\mathbb{E}(X)$.