# Ecricome ECE 2018 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

17 mai 2022

## Exercice 1

### Partie I

1. (a) On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$, puis $A^2-7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_3$.

   (b) Supposons donc que $\lambda$ soit une valeur propre de $A$, alors il existe un vecteur-colonne $X$ non nul tel que $AX = \lambda X$. On en déduit $A^2X = \lambda^2 X$, puis $(A^2 - 7X + 12I_3)X = (\lambda^2 - 7\lambda + 12)X$. Or, la question précédente montre que ce vecteur doit être nul, ce qui impose $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$. Cette équation du second degré admet pour discriminant $\Delta = 49 - 48 = 1$, et a pour racines $\lambda_1 = \dfrac{7+1}{2} = 4$ et $\lambda_2 = \dfrac{7-1}{2} = 3$. On a bien prouvé que les deux seules valeurs propres possibles pour $A$ étaient 3 et 4.

   (c) Vérifions pour chacune des deux valeurs obtenues s'il existe des vecteurs propres non nuls : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vérifie $AX = 3X$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & 2c & = & 3a \\ & & 3b & & & = & 3b \\ a & - & b & + & 5c & = & 3c \end{array}\right.$.
   La deuxième équation étant manifestement toujours vérifiée, on peut ne garder que les deux autres, qui sont en fait identiques : $a-b+2c = 0$, donc $\ker(A-3I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   Les deux vecteurs donnés n'étant pas proportionnels, ils forment une base de notre sous-espace propre. On effectue le même raisonnement pour déterminer les vecteurs propres associés à la valeur propre 4, ce qui mène au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & 2c & = & 4a \\ & & 3b & & & = & 4b \\ a & - & b & + & 5c & = & 4c \end{array}\right.$.
   Cette fois, la deuxième équation impose $b = 0$, et les deux équations restantes deviennent équivalentes à $a + c = 0$, donc $\ker(A - 4I_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   (d) La matrice est certainement diagonalisable puisque la base constituée des trois vecteurs obtenus à la question précédente (il s'agit nécessairement d'une base puisqu'on a deux sous-espaces de dimension respective 2 et 1 et qu'aucun vecteur non nul ne peut vérifier à la fois $AX = 3X$ et $AX = 4X$) est par construction une base de diagonalisation de $f$. En fait, on a même prouvé que $A$ est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, ce qui prouve également que $A$ est inversible puisque $D$ l'est manifestement (et que $A = PDP^{-1}$ pour une matrice de passage bien choisie).

2. (a) On déterminer le noyau de $B$ en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & - & c & = & 0 \\ -3a & + & 3b & - & 3c & = & 0 \\ -a & + & b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$. La

première et la dernière équation sont manifestement équivalentes (un simple changement de signe) et $L_2 + 3L_1$ donne immédiatement $c = 0$. On en déduit $a = b$, donc $\ker(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. La valeur 0 est donc valeur propre de $B$, et le sous-espace propre est celui qu'on vient de calculer.

(b) Écrivons la matrice : $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les colonnes $C_1$ et $C_3$ étant identiques, et la colonne $C_2$ non proportionnelle à $C_1$, le rang de la matrice est trivialement égal à 2. Notons immédiatement que cela signie que $B - 2I_3$ n'est pas inversible, et donc que $\ker(B - 2I_3) \neq \{0\}$, ce qui prouve que 2 est valeur propre de la matrice $B$, et donc de $f$.

(c) Calculons donc, avec les notations que nous utilisons d'habitude, $f(1, -1, -1) = (3, -3, -3) = 3(1, -1, -1)$. Le vecteur $(1, -1, -1)$ est donc un vecteur propre de $f$, associé à la valeur propre 3.

(d) On a trouvé trois valeurs propres distinctes pour l'application $f$. Comme on est en dimension 3, l'application est donc diagonalisable (la famille constitué des vecteurs propres $(1, 1, 0)$, $(1, -1, -1)$ et d'un troisième vecteur appartenant à $\ker(f - 2\,id)$ sera une base de diagonalisation de $f$.

3. Il s'agit donc de trouver une matrice $P$ qui soit une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers une base de diagonalisation **commune** de $A$ et de $B$, avec en plus la condition que la première coordonnée de chaque vecteur est imposée par l'énoncé. Tout cela nous laisse peu de marge de manoeuvre. Si on note $(u, v, w)$ la base recherchée, on doit avoir $f(u) = 3u$, et la première coordonnée de $u$ est égale à 1, donc $u = (1, -1, -1)$ (cf les calculs précédents). Comme de plus $(1, -1, -1) = (1, 1, 0) - (0, 2, 1)$, notre vecteur $u$ appartient au sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre 3. Pour le deuxième vecteur $v$, il doit être dans le noyau de $B$ et avoir à nouveau 1 comme première coordonnée, ce qui impose $v = (1, 1, 0)$. On sait déjà que ce vecteur est également vecteur propre pour la matrice $A$, également associé à la valeur propre 3. Il reste à déterminer le troisième vecteur $w$, qui doit forcément appartenir à $\ker(A - 4I_3)$ pour que $(u, v, w)$ soit une base de diagonalisation de $A$. Les calculs de la première question imposent alors $w = (-1, 0, 1)$ (puisqu'à nouveau la première coordonnée est imposée). Vérifions que ce vecteur est également vecteur propre de $f$ : $f(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2) = 2(-1, 0, 1)$, ce qui coïncide avec la troisième valeur propre attendue pour $B$. La base $(u, v, w)$ vérifie donc toutes les conditions de l'énoncé (c'est nécessairement une famille libre en temps que base de diagonalisation de $B$), et la matrice de passage correspondante est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Partie II

1. Il suffit d'écrire que $Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n = \frac{1}{6}P{-}1APY_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BPX_n$. Or, on a vu dans la première partie que la matrice $P$ était construite pour vérifier $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$, ce qui donne bien $Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.

2. On connait les coefficients diagonaux des matrices $D_1$ et $D_2$ : ils sont égaux à 3, 3 et 4 pour $D_1$, et à 3, 0 et 2 pour $D_2$. Il suffit donc d'écrire explicitement la relation précédente : $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, ce qui donne bien le sys-

tème $\begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2}b_n \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$.

3. Puisqu'on nous fournit la matrice inverse, il est très tentant de se contenter de vérifier que $P^{-1}P = I_3$, mais on va quand même calculer « sérieusement » l'inverse à coups de résolution de système : $\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + y = b \\ -x + z = c \end{cases}$. La somme des lignes $L_1$ et $L_3$ donne $y = a+c$. On en déduit via la deuxième ligne $x = y-b = a-b+c$, puis via la première $z = x+y-a = a-b+2c$. Autrement dit, la matrice $P$ est bien inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Incroyable, c'est la même matrice que dans l'énoncé. On calcule alors $Y_0 = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $Y_1 = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. Il s'agit de calcul assez brutal :
   - La suite $(a_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Cette équation a pour racine évidente $x_1 = 1$ et pour deuxième racine $x_2 = -\frac{1}{2}$, donc $a_n = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pour deux constantes réelles $A$ et $B$. Les valeurs calculées pour $a_0$ et $a_1$ imposent les conditions $A + B = 2$ et $A - \frac{1}{2}B = 1$, donc en soustrayant $\frac{3}{2}B = 1$, soit $B = \frac{2}{3}$ puis $A = \frac{4}{3}$. Finalement, $a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
   - La suite $(b_n)$ est plus sobrement géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $b_0 = 2$, donc $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   - La suite $(c_n)$ est à nouveau récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Là encore on a pour racine évidente $x_1 = 1$, et pour deuxième racine $x_2 = -\frac{1}{3}$, donc $c_n = C + D\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. On exploite à nouveau les deux conditions initiales : $A + B = 1$ et $A - \frac{1}{3}B = -1$ donc en soustrayant $\frac{4}{3}B = 2$, soit $B = \frac{3}{2}$ puis $A = -\frac{1}{2}$. On conclut : $c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
5. On sait que $Y_n = P^{-1}X_n$, donc $X_n = PY_n$. On connait désormais intégralement les coordonnées du vecteur $Y_n$, il ne reste donc plus qu'à effectuer le produit matriciel pour obtenir $\alpha_n = a_n + b_n - c_n = \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, puis $\beta_n = b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, et enfin $\gamma_n = c_n - a_n = -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
6. (a) Réécrivons complètement la fonction dans un langage un peu moins barbare que celui de l'énoncé, en important le module numpy pour pouvoir faire les produits matriciels sans s'embêter :

```
import numpy as np
def X(n) :
```

```
Xold=np.array([[3],[0],[-1]])
Xnew=np.array([[3],[0],[-2]])
A=np.array([[2,1,-2],[0,3,0],[1,-1,5]])
B=np.array([[1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]])
for i in range(2,n+1) :
    Xold,Xnew=Xnew,(np.dot(A,Xnew)+np.dot(B,Xold))/6
return Xnew
```

(b) Il suffit d'observer les limites de chacune des suites pour conclure. La seule ayant une limite positive est $(\alpha_n)$ qui correspond donc au premier tracé (celui qui est le plus haut), $\gamma_n$ est celle qui a la limite la plus négative et correspond donc au tracé du bas, celui de milieu étant $\beta_n$.

# Exercice 2

## Partie I : Étude de deux suites.

1. (a) La limite en 0 ne pose aucun problème puisqu'il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. De l'autre côté, il suffit d'écrire $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ pour obtenir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(b) La fonction $f$ est dérivable et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2} > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Son tableau de variations n'a aucun intérêt, mais puisqu'on nous le demande, donnons-le :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $0$ |

(c) Calculons $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = f(n)$.

(d) L'étude de $f$ effectuée plus haut montre que la fonction ne prend que des valeurs négatives sur $]0, +\infty[$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.

(e) Bon, écrivons un petit programme Python, mais on ne va vraiment pas se fatiguer (on peut bien sûr écrire une boucle si on le souhaite pour le calcul de la somme) :

```
from math import log
def u(n) :
    return sum([1/i for i in range(1,n+1)])-log(n)
```

2. (a) Encore un calcul très difficile : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ en reprenant le calcul déjà effectué plus haut pour $u_{n+1} - u_n$.

(b) C'est une inégalité de convexité classique. On l'applique à $x = \dfrac{1}{n}$ pour en déduire que $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, et donc que $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. La suite $(v_n)$ est donc croissante.

(c) On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Comme $\frac{1}{n}$ a pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, on en déduit que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$.

(d) Le terme général de la série $\sum v_{n+1} - v_n$ est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente, les deux séries sont à termes positifs, donc $\sum v_{n+1} - v_n$ converge.

(e) C'est une somme télescopique qui se calcule immédiatement : $\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_1$. Comme $v_1 = u_1 - 1 = 0$, on a simplement $\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n$. Comme cette somme partielle converge par définition vers $\gamma$, on en déduit que $\lim v_n = \gamma$.

3. (a) Puisque $u_n = v_n + \frac{1}{n}$, on a également $\lim u_n = \gamma$.

(b) Les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes (l'une est décroissante, l'autre croissante, et elles ont la même limite), donc vérifient bien $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$. En particulier, $u_n - \gamma \leqslant u_n - v_n = \frac{1}{n}$.

(c) Pour $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, on a $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Le calcul précédent montre alors que $u_n$ est une valeur approchée de sa limite $\gamma$ à $\varepsilon$ près.

## Partie II : Étude d'une série

1. C'est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$, qui est lui-même le terme général d'une série de Riemann convergente, donc $\sum a_n$ converge.

2. (a) La somme de gauche est celle des inverses de tous les entiers impairs inférieurs à $2n$, celle tout à droite est celle de tous les inverses des entiers pairs inférieurs ou égaux à $2n$. La somme de ces deux sommes est donc égale à la somme des inverses de tous les entiers inférieurs ou égaux à $2n$, soit $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

(b) C'est une décomposition en élément simples basiques. On multiplie par $n$ avant de poser $n = 0$ pour trouver $\alpha = -1$. On multiplie par $2n-1$ avant de poser $n = \frac{1}{2}$ pour trouver $\beta = 2$. Conclusion : $\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}$.

(c) En reprenant les calculs précédents, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2}{k} - \sum k = 1^n \frac{2}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. (a) Par définition, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + \ln(n)$, donc $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n} + \ln(2n) - u_n - \ln(n) = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

(b) On déduit des questions précédentes que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2u_{2n} - 2u_n + 2\ln(2)$. Comme $(u_n)$ converge vers $\gamma$, cette somme partielle a donc pour limite $2\gamma - 2\gamma + 2\ln(2) = 2\ln(2)$. Autrement dit, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)$.

4. (a) On effectue un petit changement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.
   (b) On reconnait dans la somme obtenue à la question précédente une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, qui converge donc vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 =$ $\ln(2)$. On retrouve bien $\displaystyle\lim \sum_{k=1}^{n} a_k = 2\ln(2)$.

# Exercice 3

## Partie I

1. Il s'agit d'un cas classique de loi binomiale. Plus précisément, avec les hypothèses faites, $X \sim \mathcal{B}\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$. Le joueur gagne s'il n'obtient aucun Pile ou s'il obtient deux Piles, donc $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{3^3}+\dbinom{3}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}+\dfrac{12}{27}=\dfrac{13}{27}$.
2. Le gain sera nul si on ne tire pas de Pile, égal à $2\times 10 = 20$ euros si on en tire deux. Il sera négatif dans les deux autres cas : $-10$ si on a tiré un Pile, $-30$ si on en tire trois. Les probabilités correspondantes sont celles de la variable $X$ : $\dfrac{1}{27}$ pour $G=0$, $\dfrac{12}{27}$ pour $G=20$ comme on l'a vu à la question précédente. De même, $\mathbb{P}(G=-10)=\dbinom{3}{1}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{6}{27}$ et $\mathbb{P}(G=-30)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$. On peut donc résumer la loi de $G$ dans le tableau suivant :

| $k$ | $-30$ | $-10$ | $0$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(G=k)$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{12}{27}$ |

3. L'espérance vaut $\mathbb{E}(G)=\dfrac{-240-60+240}{27}=-\dfrac{20}{9}$. Cette espérance étant largement négative, le jeu est très défavorable au joueur (il perdra plus de deux euros en moyenne par partie).

## Partie II

1. (a) La variable $Z$ prend la valeur $\dfrac{-1+1}{2}=0$ si $Y=0$ et la valeur $\dfrac{1+1}{2}=1$ si $Y=1$, donc $Z(\Omega)=\{0,1\}$ et $Z$ est bien une variable de Bernoulli. De plus, $Z=1$ si et seulement si $Y=1$, ce qui se produit si $X$ prend une valeur paire, donc avec probabilité $\mathbb{P}(A)$.
   (b) La question précédente montre que $\mathbb{E}(Z)=\mathbb{P}(A)$. Or, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z)=\dfrac{1}{2}(1+\mathbb{E}(Y))$, donc $\mathbb{E}(Y)=2\mathbb{E}(Z)-1=2\mathbb{P}(A)-1$.
2. (a) La variable $X$ suit toujours une loi binomiale (on est dans une situation classique de schéma de Bernoulli). Plus précisément, $X\sim\mathcal{B}(n,p)$.
   (b) Il suffit d'appliquer le théorème du transfert : $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}((-1)^X)=\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)}(-1)^k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k}=(1-2p)^n$ par simple application de la formule du binome de Newton.
3. On en déduit immédiatement $\mathbb{P}(A)=\dfrac{1+\mathbb{E}(Y)}{2}=\dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$.
4. D'après le résultat de la question précédente, $\mathbb{P}(A)\geqslant\dfrac{1}{2}$ si $(1-2p)^n\geqslant 0$, ce qui est bien le cas lorsque $n$ est pair, ou si $1-2p\geqslant 0$, donc $p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

## Partie III

1. Par définition, $G = 10X$ si $X$ est pair, et $G = -10X$ si $X$ est impair. Cela revient exactement à dire que $G = 10(-1)^X X$, ou encore $G = 10XY$. Il suffit à nouveau d'appliquer la théorème du transfert pour en déduire que $\mathbb{E}(G) = 10\mathbb{E}((-1)^X X) = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\mathbb{P}(X = k)$.
2. De qui se moque-t-on dans ce sujet pour épiciers ? La formule sans nom, c'est du cours, je vous laisse le consulter si besoin.
3. En exploitant la formule sans non, on calcule $\mathbb{E}(G) = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{n-k} = 10n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-p)^{k+1}(1-p)^{n-1-k} = -10np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-p)^k(1-p)^{n-1-k} = -10np(1-2p)^{n-1}$.
4. On a déjà vu que $\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2}$ si $n$ est pair ou $1-2p \leqslant 0$. Si on ajoute la condition $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$, on doit donc avoir en plus, d'après le calcul précédent $(1-2p)^{n-1} \geqslant 0$ (le facteur restant étant négatif). Si $n$ est impair, ce sera toujours le cas, mais si $n$ est pair, cela impose $1-2p \leqslant 0$, donc $p \leqslant \frac{1}{2}$ dans tous les cas.
5. (a) La fonction $f$ est évidemment dérivable, et $f'(x) = (1-2x)^{n-1} - 2x(n-1)(1-2x)^{n-2} = (1-2x)^{n-2}(1-2x-2x(n-1)) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx)$. Puisque $1-2x \geqslant 0$ sur l'intervalle de définition $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f'(x)$ est du signe de $1-2nx$, donc $f$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right]$. On ne demande pas la valeur du maximum atteint en $x = \frac{1}{2n}$, donc on se dispensera du calcul.

   (b) Pour optimiser la rentabilité, l'espérance de gain doit être la plus négative possible. Comme $\mathbb{E}(G) = -10nf(p)$, cela revient à prendre pour $p$ la valeur pour laquelle $f(p)$ est maximal, donc $p = \frac{1}{2n}$.

## Partie IV

1. La loi de $G_i$ sera la même pour tous les entiers $i$ (indépendance des jeux des différents clients). Pour un client donné, puisqu'on ne lance que deux pièces, le gain peut prendre les valeurs 0, 20 ou $-10$, avec les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(G = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, $\mathbb{P}(G = 20) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, et $\mathbb{P}(G = -10) = \binom{2}{1}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{6}{16}$. L'espérance de cette loi vaut donc $\frac{20-60}{16} = -\frac{40}{16} = -\frac{5}{2}$. De plus, $\mathbb{E}(G_i^2) = \frac{600+400}{16} = \frac{1000}{16} = \frac{125}{2}$. La formule de König-Huygens permet alors de calculer $\mathbb{V}(G_i) = \frac{125}{2} - \frac{25}{4} = \frac{225}{4}$.
2. Le gain du forain sur chaque partie est l'opposé de celui du joueur, donc $J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$. En particulier, par linéarité de l'espérance et de la variance (les variables sont indépendantes), $\mathbb{E}(J) = -200 \times \mathbb{E}(G_i) = \frac{1000}{2} = 500$, et $\mathbb{V}(J) = 200 \times \mathbb{V}(G_i) = 50 \times 225 = 11\ 250$.
3. C'est complètement évident : $|J - 500| \geqslant 400$ est équivalent à avoir soit $J \leqslant 100$ soit $J \leqslant 900$, la probabilité du premier cas est certainement inférieure à la somme des deux probabilités.
4. Rappelons donc que, pour ue variable $X$ d'espérance $m$ et de variance $V$, on peut écrire que, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{V}{a^2}$. On va ici appliquer l'inégalité à la variable

$J$, en posant $a = 400$ : $\mathbb{P}(J \leqslant 100) \leqslant \mathbb{P}(|J - 500| \leqslant 400) \leqslant \dfrac{11\ 250}{160\ 000}$. Il ne reste plus qu'à simplifier ce sympathique majorant : $\dfrac{11\ 250}{160\ 000} = \dfrac{1\ 125}{16\ 000} = \dfrac{225}{3\ 200} = \dfrac{45}{640} = \dfrac{9}{128}$. Incroyable, c'est exactement l'inégalité qu'on nous demandait de prouver !

5. Il ne devrait pas être trop dur de se convaincre que $\dfrac{9}{128} < \dfrac{10}{128} < \dfrac{10}{100}$, donc la réponse est oui.