Devoir de rentrée : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

1er septembre 2021

1. Il suffit de faire une multiplication à la portée du premier élève de maternelle venue : $3 \times 2 \times 4 = 24$ menus possibles. C'est le genre de situation qu'on peut facilement représenter par un arbre.
2. Au niveau des desserts, il faut choisir deux desserts parmi les quatre disponibles, ce qui peut se faire de $\binom{4}{2} = 6$ façons. Ensuite, c'est (presque) la même multiplication que ci-dessus : $3 \times 2 \times 6 = 36$ menus possibles.
3. Puisqu'on nous le propose si gentiment, on effectuer donc une IPP en posant $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $v'(x) = x$, dont une primitive est donnée par $v(x) = \frac{x^2}{2}$. On obtient alors $I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$.
4. Même pas vraiment besoin de passer par des probabilités conditionnelles ici : 6 garçons et 6 filles adorent les maths, donc 12 élèves sur les 25 de la classe, soit une probrabilité égale à $\frac{12}{25}$.
5. Un nombre réel a une valeur absolue plus grande que 5 dans deux cas : s'il est lui-même plus grand que 5, ou s'il est plus petit que -5. Les solutions de l'inéquation vérifient donc soit $2x - 3 \geqslant 5 \Leftrightarrow x \geqslant 4$, soit $2x - 3 \leqslant -5 \Leftrightarrow x \leqslant -1$. Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$.
6. On commence par décomposer l'entier 96 en produit de puissances de 2 et de 3 : $96 = 32 \times 3 = 2^5 \times 3$. Ensuite, on applique les propriétés classiques du logarithme : $\ln(2^5 \times 3) = 5\ln(2) + \ln(3)$.
7. La fonction $g : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ a pour dérivée $g' : x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$. Il ne reste plus qu'à dériver f comme un produit (c'est plus léger que d'utiliser une dérivée de quotient) : $f'(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}$.
8. Il suffit de calculer leur produit scalaire : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -4 - 5 + 9 = 0$, donc les vecteurs sont bien orthogonaux.
9. Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f appartenant à l'intervalle $[a, b]$ (volontairement, je n'ai pas utilisé de quantificateurs).
10. Les solutions sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ke^{-3x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
11. Le module du dénominateur vaut $|1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
12. Plusieurs façons de faire ici. Si on sait que i admet pour argument $\frac{\pi}{2}$ et $1+i$ admet pour argument $\frac{\pi}{4}$ (c'est géométriquement évident), les propriétés de l'argument permettent d'affirmer directement que $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
    Sinon, on met brutalement le nombre z sous forme algébrique et on factorise par son module : $z = \frac{i(1-i)}{1+1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ pour aboutir au même résultat.

13. Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles vérifiant les hypothèses suivantes :

   - $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang
   - les deux suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite réelle l.

   Alors la suite (v_n) converge également vers l.

14. On a bien sûr très envie d'élever au carré les deux membres de l'équation, mais attention, on n'obtiendra une équation équivalente à celle de départ que si les deux membres sont positifs, donc si $x \geqslant 0$. De toute façon, si $x < 0$, il ne peut pas être solution de l'équation (le membre de gauche est alors strictement négatif, alors que celui de droite, quand il existe, est positif). En supposant donc $x \geqslant 0$, notre équation est équivalente à $x^2 = x + 2$, soit $x^2 - x - 2 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$, et $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Il faut éliminer la solution négative, donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

15. On est exactement dans une situtation de schéma de Bernoulli : on répète cinq fois de suite la même expérience ayant une probabilité $\frac{1}{3}$ de réussir, et on compte le nombre de succès. La variable aléatoire correspondante suit donc une loi binômiale de paramètre $\left(5, \frac{1}{3}\right)$, et admet une espérance égale à $\frac{5}{3}$.

16. Le quotient $\frac{1}{x\ln(x)}$ est en fait de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, en posant $u(x) = \ln(x)$. Comme $\ln(x) > 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on peut prendre comme primitive la fonction $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

17. Sur le cercle trigonométrique, les deux angles remarquables vérifiant $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sont $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$. Les solutions de notre équation sont donc tous les angles vérifiant $x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

18. Pour tout entier naturel $n > 1$, pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (il y a plusieurs autres formulations équivalentes possibles).

19. La première équation impose $y = 4 - x$, on peut simplement remplacer dans l'autre équation pour obtenir $x(4-x) = 2$, donc $x^2 - 4x + 2 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$, et admet pour racines réelles $x_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$, et $x_2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$. On vérifie facilement que $x = x_1 \Rightarrow y = x_2$ et vice-versa (ce qui est logique puisque les deux variables jouent un rôle symétrique dans le système). On a donc deux couples de solutions possibles : $\mathcal{S} = \{(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}); (2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})\}$.

20. Pour ne pas trop s'embêter, on multiplie par la quantité conjuguée : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. La limite ne pose alors plus aucun problème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.