Programme de colle n° 6

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 08/10 au 12/10 2021

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 4 : Trigonométrie.

- rappels sur les fonctions sin, cos et tan (dérivée, variations, courbes), exemples d'études de fonctions trigonométrique (importance du choix d'un intervalle d'étude pertinent au vu des symétries de la fonction).
- fonctions circulaires réciproques : domaine de définition, **dérivée**, variations, courbe, formule $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, exemples de simplifications d'expressions du type $\cos(\arctan(x))$ et de démonstration d'égalités du type $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$ par deux méthodes (dérivation brutale, ou utilisation plus subtile de la trigonométrie via un changement de variable).

Chapitre 5 : Techniques de calcul algébrique.

- démonstration par récurrence et variations (récurrence double, récurrence forte).
- sommes finies :
  - notation $\sum$, règles de calcul (linéarité, relation de Chasles, changement d'indice)
  - **calcul des sommes classiques** $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $\sum_{i=0}^{n} i^3$, $\sum_{i=0}^{n} q^i$
  - exemples de calculs de sommes télescopiques (le théorème de décomposition en éléments simples a été énoncé dans une version très simplifiée, avec un numérateur de degré strictement plus petit que le dénominateur, et uniquement des racines simples, sans parler bien sûr de racines complexes, les facteurs de degré 2 étant laissés sous leur forme réelle irréductible)
  - exemples de calculs de sommes doubles, du type $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$ ou $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}$
- produits finis : notation, régles de calcul, factorielle d'un nombre entier naurel.
- coefficients binômiaux $\binom{n}{k}$:

— définition comme quotients de factorielles (on a évoqué la vision combinatoire du nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, mais aucune interprétation combinatoire n'est exigible)
— formules classiques : **symétrie des coefficients binômiaux**, **formule** $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, **relation de Pascal**
— triangle de Pascal
— **formule du binôme de Newton** (démonstration effectuée par récurrence, on doit au moins pouvoir expliquer les grandes lignes de la démonstration)
— formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ sous la forme $(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

- petits systèmes linéaires :
  — vocabulaire (systèmes linéaire, système carré, système triangulaire, système incompatible, système de Cramer)
  — opérations élémentaires sur les lignes d'un système, algorithme du pivot de Gauss pour la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues (le cas général n'a pas été traité pour l'instant)
  — exemples de résolution de systèmes à paramètre
  — aucune interprétation ou méthode de résolution matricielle n'a été abordée pour l'instant

Prévisions pour la semaine suivante : on garde les systèmes, et on ajoute le début du chapitre 6, à savoir les calculs de primitives et intégrales.