Programme de colle n$^{\text{o}}$ 30

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 13/06 au 17/06 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 25 : Séries numériques (et familles sommables).

- Vocabulaire : série de terme général u_n (usuellement notée $\sum u_n$, la somme partielle étant notée S_n), convergence, somme d'une série, reste d'indice n de la série (normalement noté R_n).
- Séries à termes positifs : majoration, comparaison (via inégalité, équivalence ou O), linéarité du calcul de somme, **comparaison série-intégrale**.
- Séries à termes quelconques (et séries complexes) : séries absolument convergentes, critère spécial des séries alternées.
- Séries de référence : séries de Riemann, équivalent de la somme partielle H_n de la série harmonique, **séries géométriques et géométriques dérivées**, séries exponentielles.
- Familles sommables : cas des familles de réels positifs (la famille est sommable si et seulement si l'ensembles des sommes de sous-familles finies admet une borne supérieure, appelée somme de la famille ; dans le cas contraire, $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$), théorème de sommation par paquets (on doit notamment être capable d'écrire une « somme double infinie » sous la forme de « somme de diagonales » $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_{k,n-k}$), régles de calcul sur les familles sommables (linéarité, changement d'indices, théorème de Fubini, familles produits).
- Familles sommables de nombres réels quelconques et de nombres complexes : définition de la sommabilité (la famille $|z_i|$ doit être sommable), règles de calcul (les mêmes que ci-dessus), produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Chapitre 26 : Espaces préhilbertiens.

- Produits scalaires dans les espaces vectoriels réels, définition et notations (je privilégie les notations $u \cdot v$ et $\langle u, v \rangle$, mais les autres notations classiques sont acceptées), espaces préhilbertiens et euclidiens (la seule différence étant la dimension finie des seconds), produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (défini par $A \cdot B = \mathrm{Tr}(A^\top B)$), normes et distances.

- Formules faisant intervenir normes et produit scalaires : $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2$, $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2$, $(u+v)\cdot(u-v) = \|u\|^2 - \|v\|^2$, identités de polarisation, identité du parallélogramme, inégalité de Cauchy-Schwartz, inégalité triangulaire (et cas d'égalité pour ces deux dernières). **On doit savoir démontrer toutes ces formules**.
- Orthogonalité : vecteurs normés, orthogonaux, sous-ensembles orthogonaux, familles orthogonales et orthonormales, théorème de Pythagore, expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (on doit absolument être capable d'en expliquer le principe en faisant un dessin).
- Orthogonal d'un sous-ensemble, supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- Projections et symétries orthogonales, distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.