

Programme de colle n° 29

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 30/05 au 03/06 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 24 : Groupe symétrique, déterminants.

- Groupe symétrique \mathfrak{S}_n : vocabulaire (transpositions, cycles, support et longueur d'un cycle), décomposition en produit de cycles à supports disjoints (on n'a fait qu'une ébauche de preuve), et en produit de transpositions.
- Nombre d'inversions d'une transposition, signature, la signature est un morphisme de \mathfrak{S}_n vers $\{-1, 1\}$.
- Déterminants :
 - rappels sur le déterminant de deux vecteurs du plan et de trois vecteurs de l'espace : définition géométrique (dans le plan), caractérisation de la colinéarité/coplanarité, interprétation comme aire/volume d'un parallélogramme/parallélépipède, formule dans une base orthonormale, propriétés théoriques (multilinéarité, antisymétrie, alternance)
 - applications multi-linéaires, formes n -linéaires sur un espace vectoriel E , formes symétriques, antisymétriques, alternées, **équivalence entre antisymétrie et alternance**, l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur un ev de dimension n est un ev de dimension 1
 - déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, noté $\det_{\mathcal{B}}$, caractérisation des bases comme familles de déterminant non nul, orientation de \mathbb{R}^n
 - déterminant d'une matrice carrée : définition, caractérisation de l'inversibilité, propriétés élémentaires $\det(M^T) = \det(M)$, $\det(MN) = \det(M) \det(N)$ (la **démonstration de cette dernière** est à connaître), techniques de calcul (effet des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes, développement du déterminant par rapport à une ligne/colonne), mineurs, cofacteurs et comatrice, formule d'inversion $M(\text{Com}(M))^T = \det(M)I_n$, exemples de calcul de déterminants par récurrence (on a en particulier traité le cas du **déterminant de Vandermonde** en cours, qui peut être posé en question de cours).

Chapitre 25 : Séries numériques (et familles sommables).

- Vocabulaire : série de terme général u_n (usuellement notée $\sum u_n$, la somme partielle étant notée S_n), convergence, somme d'une série, reste d'indice n de la série (normalement noté R_n).
- Séries à termes positifs : majoration, comparaison (via inégalité, équivalence ou O), linéarité du calcul de somme, **comparaison série-intégrale**.
- Séries à termes quelconques (et séries complexes) : séries absolument convergentes, critère spécial des séries alternées.
- Séries de référence : séries de Riemann, équivalent de la somme partielle H_n de la série harmonique, **séries géométriques et géométriques dérivées**, séries exponentielles.

Prévisions pour la dernière semaine (dans 15 jours) : séries et famille sommables, espaces préhilbertiens.