Programme de colle n° 28

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 23/05 au 25/05 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 23 : Variables aléatoires.

- Vocabulaire général : variable aléatoire réelle, univers-image $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X, loi d'une variable aléatoire (qui sera par défaut présentée sous forme de tableau puisqu'on travaillera toujours sur un univers fini), opérations élémentaires sur les variables aléatoires (somme, max, min, composition par une fonction réelle), variable aléatoire indicatrice d'un évènement.
- Moments d'une variable aléatoire :
  - espérance $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$, linéarité de l'espérance, positivité de l'espérance, variable aléatoire centrée, théorème du transfert.
  - variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$, positivité de la variance, **formule** $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$, **formule de König-Huygens** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (qui devra être utilisée de façon automatique pour les calculs de variance), variable aléatoire réduite, définition de l'écart-type $\sigma(X)$.
  - **inégalités de Markov et de de Bienaymé-Tchebychev** (aucun exercice n'a été traité sur le sujet)
- Lois usuelles :
  - loi uniforme à valeurs dans $\{1, 2 \dots, n\}$, **espérance et variance**
  - loi de Bernoulli de paramètre p
  - schéma de Bernoulli, loi binômiale de paramètre (n, p), **espérance et variance** (calculées brutalement à coup de binôme de Newton)
- Couples de variables aléatoires :
  - loi conjointe d'un couple (X, Y), lois marginales, loi conditionnelle de Y sachant $X = k$
  - indépendance de variables aléatoires, lemme des coalitions, formule $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ dans le cas de l'indépendance, somme de variables indépendantes suivant des lois $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$
  - covariance de deux variables aléatoires, propriétés classiques (symétrie, bilinéarité, positivité, « théorème de Pythagore » $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$, corollaire sur la linéarité de la variance pour des variables indépendantes), coefficient de corrélation et interprétation du signe de ce coefficient

Chapitre 24 : Groupe symétrique, déterminants.

- Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$: vocabulaire (transpositions, cycles, support et longueur d'un cycle), décomposition en produit de cycles à supports disjoints (on n'a fait qu'une ébauche de preuve), et en produit de transpositions.
- Nombre d'inversions d'une transposition, signature, la signature est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ vers $\{-1, 1\}$.
- Déterminants :
  - rappels sur le déterminant de deux vecteurs du plan et de trois vecteurs de l'espace : définition géométrique (dans le plan), caractérisation de la colinéarité/coplanarité, interprétation comme aire/volume d'un parallélogramme/parallélépipède, formule dans une base orthonormale, propriétés théoriques (multilinéarité, antisymétrie, alternance)
  - applications multi-linéaires, formes n-linéaires sur un espace vectoriel E, formes symétriques, antisymétriques, alternées, **équivalence entre antisymétrie et alternance**, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un ev de dimension n est un ev de dimension 1
  - déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, noté $\det_{\mathcal{B}}$, caractérisation des bases comme familles de déterminant non nul, orientation de $\mathbb{R}^n$
  - déterminant d'une matrice carrée : définition, caractérisation de l'inversibilité, propriétés élémentaires $\det(M^\top) = \det(M)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ (la **demonstration de cette dernière** est à connaitre), techniques de calcul (effet des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes, développement du déterminant par rapport à une ligne/colonne), mineurs, cofacteurs et comatrice, formule d'inversion $M(\mathrm{Com}(M))^\top = \det(M)I_n$, exemples de calcul de déterminants par récurrence (on a en particulier traité le cas du **déterminant de Vandermonde** en cours, qui peut être posé en question de cours).

Prévisions pour la semaine suivante : déterminants, peut-être un peu de séries.