

Programme de colle n° 26

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 09/05 au 13/05 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 21 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrices représentatives d'applications linéaires :
 - matrice d'une famille de vecteurs dans une base, \mathcal{F} est une base si sa matrice dans une base \mathcal{B} est inversible
 - matrice représentative $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} des espaces E et F
 - **calcul de l'image d'un vecteur (dont les coordonnées sont représentées sous forme de matrice-colonne) à l'aide de la matrice représentative**
 - matrice représentative d'une combinaison linéaire et d'une composée d'applications linéaires
 - un endomorphisme est bijectif ssi sa matrice est inversible
- Changement de bases :
 - matrice de passage d'une base vers une autre, expression de l'inverse d'une matrice de passage comme matrice de passage « dans l'autre sens »
 - formule $X = PX'$ pour les matrices colonnes de coordonnées d'un vecteur dans deux bases distinctes
 - formules de changement de bases $N = Q^{-1}MP$ et $N = P^{-1}MP$ (pour un endomorphisme)
 - matrices équivalentes et matrices semblables, ces deux relations sont des relations d'équivalence
 - quelques exemples simples de diagonalisation ont été vus en cours, le vocabulaire (valeur propre, vecteur propre, diagonalisabilité) est normalement connu mais n'est pas au programme en première année
- Outils supplémentaires sur les matrices :
 - noyau, image d'une matrice
 - rang d'une matrice, propriétés élémentaires (invariance par passage à la transposée, par opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes), exemples de calcul, lien entre matrices équivalentes et rang (**toute matrice de rang r est équivalente à une matrice J_r**)
 - trace d'un endomorphisme, invariance de la trace par similitude
 - produit de matrices par blocs
 - matrices extraites, le rang d'une matrice M est la taille maximale de ses matrices extraites inversibles

— le déterminant fera l'objet d'un chapitre séparé, il n'a pas du tout été évoqué pour l'instant

Chapitre 22 : Fractions rationnelles.

- Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: définition, opérations élémentaires sur les fractions rationnelles, représentant irréductible d'une fraction, degré, dérivée d'une fraction, pôles et racines.
- Décomposition en éléments simples : partie entière, théorème de décomposition en éléments simples (deux versions, l'une complexe, l'autre réelle, aucune n'a été démontrée), calcul effectif des décompositions (on peut utiliser les techniques suivantes : pour un pôle simple, produit par $X - a$ puis évaluation pour $X = a$, ou calcul de $\frac{P(a)}{Q'(a)}$; pour un pôle double, calcul de $G(a)$ et $G'(a)$ après avoir posé $G = (X - a)^2 F$; utilisation de l'évaluation en une valeur non polaire ou d'un calcul de limite ; divisions euclidiennes successives dans le cas d'un dénominateur de la forme $(X^2 + aX + b)^k$ dans $\mathbb{R}(X)$).

Prévisions pour la semaine suivante : fractions rationnelles, variables aléatoires.