Programme de colle n$^{\text{o}}$ 25

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 02/05 au 06/05 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 20 : Probabilités.

Rappel : seules les probabilités sur un univers **fini** sont au programme en première année.

- Vocabulaire général : expérience aléatoire, univers Ω des résultats possibles, évènements (évènement certain ou impossible, évènements incompatibles, système complet d'évènements), loi de probabilité sur un univers Ω (application vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$ quand les évènements A_i sont deux à deux incompatibles), espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
- **Propriétés élémentaires** : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (la formule de Poincaré générale n'est pas à savoir formuler, mais doit pouvoir être retrouvée très rapidement pour une union de trois ou quatre évènements), $\sum \mathbb{P}(A_i) = 1$ si les A_i forment un système complet d'évènements.
- Notion d'équiprobabilité et formule $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ dans le cas d'équiprobabilité.
- Probabilités conditionnelles :
  — définition et notation (la notation $\mathbb{P}_A(B)$ a systématiquement été employée dans le cours)
  — théorèmes faisant intervenir les probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
  — quelques exemples faisant intervenir des chaînes de Markov ont été étudiés mais aucune connaissance théorique sur le sujet n'est exigible (ce qui n'interdit bien évidemment pas de poser des exercices de ce type)
  — indépendance de deux évènements, indépendance mutuelle d'un ensemble d'au moins trois évènements
  — PAS de variables aléatoires pour l'instant, elles feront l'objet d'un chapitre séparé

Chapitre 21 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrices représentatives d'applications linéaires :
  — matrice d'une famille de vecteurs dans une base, $\mathcal{F}$ est une base si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est inversible

— matrice représentative $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des espaces E et F
— **calcul de l'image d'un vecteur (dont les coordonnées sont représentées sous forme de matrice-colonne) à l'aide de la matrice représentative**
— matrice représentative d'une combinaison linéaire et d'une composée d'applications linéaires
— un endomorphisme est bijectif ssi sa matrice est inversible

- Changement de bases :

— matrice de passage d'une base vers une autre, expression de l'inverse d'une matrice de passage comme matrice de passage « dans l'autre sens »
— formule $X = PX'$ pour les matrices colonnes de coordonnées d'un vecteur dans deux bases distinctes
— formules de changement de bases $N = Q^{-1}MP$ et $N = P^{-1}MP$ (pour un endomorphisme)
— matrices équivalentes et matrices semblables, ces deux relations sont des relations d'équivalence
— quelques exemples simples de diagonalisation ont été vus en cours, le vocabulaire (valeur propre, vecteur propre, diagonalisabilité) est normalement connu mais n'est pas au programme en première année

- Outils supplémentaires sur les matrices :

— noyau, image d'une matrice
— rang d'une matrice, propriétés élémentaires (invariance par passage à la transposée, par opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes), exemples de calcul, lien entre matrices équivalentes et rang (**toute matrice de rang r est équivalente à une matrice J_r**)
— trace d'un endomorphisme, invariance de la trace par similitude
— produit de matrices par blocs
— matrices extraites, le rang d'une matrice M est la taille maximale de ses matrices extraites inversibles
— le déterminant fera l'objet d'un chapitre séparé, il n'a pas du tout été évoqué pour l'instant

Prévisions pour la semaine suivante : algèbre linéaire (avec matrices), fractions rationnelles.