

Programme de colle n° 23

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 04/04 au 08/04 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 19 : Applications linéaires.

- Vocabulaire : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$ et $GL(E)$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ quand E et F sont de dimension finie.
- Noyau et image d'une application linéaire : définition, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme, calcul de l'image sous la forme $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ quand (e_1, \dots, e_n) est une base de l'espace de départ de l'application linéaire.
- $\mathcal{L}(E)$ est un anneau, et $GL(E)$ un groupe, notation f^n pour désigner les composées successives d'un endomorphisme par lui-même.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, **théorème du rang**.
- Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (un contre-exemple a été vu en dimension infinie). Majoration du rang d'une composée : $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
- Formes linéaires et hyperplan, un hyperplan H est supplémentaire de toute droite qui n'est pas incluse dans H .
- Applications linéaires « géométriques » :
 - homothéties
 - projection sur un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G , **caractérisation des projections par la relation $p^2 = p$** , caractérisation des sous-espaces F et G comme image et noyau de la projection p , caractérisation de l'image comme $\ker(p - \text{id})$
 - symétrie par rapport à un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G , caractérisation des symétries par la relation $s^2 = \text{id}$, caractérisation des sous-espaces F et G comme noyaux de $s - \text{id}$ et de $s + \text{id}$, relation $s = 2p - \text{id}$ entre symétrie et projection ayant les mêmes éléments caractéristiques

Chapitre 20 : Probabilités.

Rappel : seules les probabilités sur un univers **fini** sont au programme en première année.

- Vocabulaire général : expérience aléatoire, univers Ω des résultats possibles, évènements (évènement certain ou impossible, évènements incompatibles, système complet d'évènements), loi de probabilité sur un univers Ω (application vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$ quand les évènements A_i sont deux à deux incompatibles), espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) .
- **Propriétés élémentaires** : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (la formule de Poincaré générale n'est pas à savoir formuler, mais doit pouvoir être retrouvée très rapidement pour une union de trois ou quatre évènements), $\sum \mathbb{P}(A_i) = 1$ si les A_i forment un système complet d'évènements.
- Notion d'équiprobabilité et formule $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ dans le cas d'équiprobabilité.
- Probabilités conditionnelles :
 - définition et notation (la notation $\mathbb{P}_A(B)$ a systématiquement été employée dans le cours)
 - théorèmes faisant intervenir les probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
 - quelques exemples faisant intervenir des chaînes de Markov ont été étudiés mais aucune connaissance théorique sur le sujet n'est exigible (ce qui n'interdit bien évidemment pas de poser des exercices de ce type)
 - indépendance de deux évènements, indépendance mutuelle d'un ensemble d'au moins trois évènements
 - PAS de variables aléatoires pour l'instant, elles feront l'objet d'un chapitre séparé

Prévisions pour la semaine suivante : probas, algèbre linéaire (avec matrices).