Programme de colle n° 21

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 21/03 au 25/03 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 17 : Espaces vectoriels.

- Définitions et exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels (au choix : non vide et stable par somme et produit extérieur, ou non vide et stable par combinaisons linéaires).
- Familles de vecteurs :
  - Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille, notation Vect et exemples d'utilisation (notamment pour les solutions de systèmes linéaires homogènes)
  - Familles génératrices, familles libres et liées (notion de dépendance linéaire entre vecteurs), bases, coordonnées et composantes d'un vecteur dans une base
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation à l'aide de bases (F et G sont supplémentaires si et seulement si l'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E).
- Dimension :
  - définition d'un espace vectoriel de dimension finie (comme un espace qui admet une famille génératrice finie)
  - théorème de la base incomplète (on doit être capable d'appliquer l'algorithme permettant de compléter une famille libre en base d'un espace vectoriel en piochant des vecteurs dans une famille génératrice)
  - existence de bases dans un espace de dimension finie, définition de la dimension (toutes les bases ayant le même cardinal)
  - dans un espace de dimension n, toute famille libre (resp. génératrice) est constituée d'au plus (resp. au moins) n vecteurs, toute famille libre OU génératrice de n vecteurs est automatiquement une base
  - **formule de Grassmann** pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
  - caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension (F et G sont supplémentaires s'ils vérifient deux conditions parmi $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$)

- Espaces vectoriels usuels :
  - $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n admettant pour base canonique $((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$
  - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np admettant pour base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, où E_{ij} est la matrice dont l'unique coefficient non nul est en position (i,j), et est égal à 1
  - $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant pour base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, toute famille échelonnée de polynômes est libre
- Seule la formule de Grassmann a été indiquée en gras pour ce chapitre mais on doit être capable de démontrer des résultats faciles comme « l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel » ou « l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel ».

Chapitre 18 : Intégration.

- Construction de l'intégrale de Riemann :
  - continuité uniforme, **théorème de Heine**
  - espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment, subdivisions adaptées, intégrale des fonctions en escalier, propriétés fondamentales de cette intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité)
  - fonctions continues pas morceaux sur un segment, approximation par les fonctions en escalier, définition de l'intégrale comme borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f, égale à la borne inférieure des intégrales de fonctions en escalier majorant f
  - extension des propriétés fondamentales à l'intégrale des fonctions continues par morceaux
- Inégalités et intégrales :
  - intégration d'inégalités sur un segment, cas particulier où l'une des fonctions est constante
  - si f est positive sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$ ssi $f = 0$
  - inégalité triangulaire $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$
  - **inégalité de Cauchy-Schwartz** $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ (démontrée en étudiant le signe d'un trinôme)
  - valeur moyenne d'une fonction sur un segment
- Exemples d'études de suites d'intégrales.
- **théorème fondamental de l'analyse** : $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f s'annulant en a, étude de fonctions définies par des intégrales à bornes variables (exemple vu en cours : $\displaystyle f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}\ dt$).
- Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.
- **Formule de Taylor avec reste intégral**, inégalité de Taylor-Lagrange (la formule avec égalité n'est par contre pas au programme).

Prévisions pour la semaine suivante : intégration, applications linéaires.