Programme de colle n$^{\text{o}}$ 20

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 14/03 au 18/03 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 16 : Analyse asymptotique

- Négligeabilité et équivalence :
  - définition pour les suites (sous la forme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$), notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$
  - manipulations et règles de calcul (produits et quotients, passage des équivalents à une puissance quelconque, équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n + o(v_n)$, on a bien sûr insisté sur l'interdiction d'additionner des équivalents ou de les composer par d'autres fonctions que les fonctions puissances), on autorise les abus de notation du type « $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$ »
  - extension aux fonctions réelles
  - croissances comparées, équivalents classiques issus de taux d'accroissements ($\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$)
- Développements limités :
  - Formule de Taylor-Young
  - vocabulaire (partie régulière d'un DL) et notations
  - parité de la partie régulière du DL d'une fonction paire ou impaire
  - formulaire de DL usuels à connaitre par coeur : e^x, $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$
  - méthodes de calcul d'un produit, quotient, composée de DL, intégration ou dérivation de DL
  - formulaire de DL à savoir retrouver rapidement : $\tan(x)$ (les trois premiers termes doivent être connus), $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$
- Applications classiques des calculs de DL :
  - calculs de limites (suites ou fonctions), on doit être capable de choisir l'ordre du DL en anticipant le calcul pour ne pas faire de calculs complexes inutilement
  - étude locale de fonction (existence de tangente et position relative de la courbe et de la tangente en 0, existence d'asymptotes obliques et position relative en $\pm\infty$)
  - développements asymptotiques de suites implicites

Chapitre 17 : Espaces vectoriels.

- Définitions et exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels (au choix : non vide et stable par somme et produit extérieur, ou non vide et stable par combinaisons linéaires).
- Familles de vecteurs :
  — Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille, notation Vect et exemples d'utilisation (notamment pour les solutions de systèmes linéaires homogènes)
  — Familles génératrices, familles libres et liées (notion de dépendance linéaire entre vecteurs), bases, coordonnées et composantes d'un vecteur dans une base
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation à l'aide de bases (F et G sont supplémentaires si et seulement si l'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E).
- Dimension :
  — définition d'un espace vectoriel de dimension finie (comme un espace qui admet une famille génératrice finie)
  — théorème de la base incomplète (on doit être capable d'appliquer l'algorithme permettant de compléter une famille libre en base d'un espace vectoriel en piochant des vecteurs dans une famille génératrice)
  — existence de bases dans un espace de dimension finie, définition de la dimension (toutes les bases ayant le même cardinal)
  — dans un espace de dimension n, toute famille libre (resp. génératrice) est constituée d'au plus (resp. au moins) n vecteurs, toute famille libre OU génératrice de n vecteurs est automatiquement une base
  — **formule de Grassmann** pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
  — caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension (F et G sont supplémentaires s'ils vérifient deux conditions parmi $F \cap G = \{0\}$, $F+G = E$ et $\dim(F)+\dim(G) = \dim(E)$)
- Espaces vectoriels usuels :
  — $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n admettant pour base canonique $((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$
  — $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np admettant pour base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, où E_{ij} est la matrice dont l'unique coefficient non nul est en position (i,j), et est égal à 1
  — $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant pour base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, toute famille échelonnée de polynômes est libre
- Seule la formule de Grassmann a été indiquée en gras pour ce chapitre mais on doit être capable de démontrer des résultats faciles comme « l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel » ou « l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel ».

Prévisions pour la semaine suivante : espaces vectoriels, intégration.