Programme de colle n$^{\text{o}}$ 17

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 07/02 au 11/02 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 13 : Polynômes.

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations de base sur $\mathbb{K}[X]$: somme, produit, composée, et propriétés élémentaires.
- Racines d'un polynôme :
  — notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, **division euclidienne**, exloitation de la division euclidienne polynômiale pour le calcul de puissances de matrices
  — factorisation d'un polynôme par $X - a$ quand a est racine de P, nombre maximal de racines pour un polynôme de degré n, principe d'identification des coefficients
  — polynôme dérivé, multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, formule de Leibniz, polynômes scindés, scindés à racines simples, théorème de d'Alembert-Gauss
  — fonctions symétriques des racines d'un polynôme, relations coefficients racines
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:
  — polynôme irréductible, caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
  — PGCD, PPCM de deux polynômes, puis d'une famille de polynômes, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, polynômes premiers entre eux
  — décomposition en produit de facteurs irrédutibles dans $\mathbb{R}[X]$ (on doit être capable de **justifier le résultat** en partant de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, en précisant que si z est racine de P alors $\overline{z}$ l'est aussi avec la même multiplicité, puis en calculant le produit $(X - z)(X - \overline{z})$ pour faire apparaitre les coefficients réels)
- polynômes interpolateurs de Lagrange
- **formule de Taylor pour les polynômes** (on a fait la démonstration dans le cas où $P = X^i$ puis très rapidement invoqué la linéarité pour justifier le cas général).

Chapitre 14 : Dérivation

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :

- — taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a, interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
  - — dérivée à gauche ou à droite en a (notées $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$), demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
  - — équation de la tangente en a à la courbe représentative de f, devéloppement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
  - — démonstration des diverses formules de dérivation (**somme**, **produit**, **inverse**, **quotient**, composée, réciproque)
  - — dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
  - — si f est dérivable sur $[a,b]$ et admet un extremum en $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$ (**démonstration** à connaître)
  - — théorème de Rolle
  - — théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
  - — application du TAF à l'étude des variations
  - — théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivale sur $]a,b]$, continue en a et f' admet une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
  - — inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ sur un intervalle I, une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- Étude de suites récurrentes :
  - — vocabulaire de base (suite récurrente, intervalle stable par une fonction f, point fixe d'une fonction)
  - — la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
  - — utilisation de l'IAF pour démontrer la convergence et éventuellement obtenir des informations sur la vitesse de convergence d'une suite récurrente (u_n) (aucune connaissance spécifique n'est exigée mais les élèves doivent connaître le fonctionnement global, et notamment savoir quand faire des récurrences)
- Extension des définitions de limite, continuité, dérivabilité aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$
- Convexité :
  - — définition à l'aide de l'inégalité de convexité $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ si $t \in [0,1]$, position d'une courbe de fonction convexe par rapport à ses sécantes
  - — **inégalité de Jensen**
  - — caractérisation de la convexité par croissance des pentes : f est convexe sur I si et seulement si tous les taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ sont croissants sur $I \backslash \{a\}$
  - — caractérisation de la convexité par la croissance de f' pour une fonction dérivable, position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes

Prévisions pour la semaine de la rentrée : dérivation, dénombrement.