Programme de colle n° 16

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 31/01 au 04/02 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Si le besoin s'en fait sentir, on pourra compléter la colle par un exercice sur le précédent chapitre (continuité).

Chapitre 13 : Polynômes.

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations de base sur $\mathbb{K}[X]$: somme, produit, composée, et propriétés élémentaires.
- Racines d'un polynôme :
  - notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, **division euclidienne**, exloitation de la division euclidienne polynômiale pour le calcul de puissances de matrices
  - factorisation d'un polynôme par $X-a$ quand a est racine de P, nombre maximal de racines pour un polynôme de degré n, principe d'identification des coefficients
  - polynôme dérivé, multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, formule de Leibniz, polynômes scindés, scindés à racines simples, théorème de d'Alembert-Gauss
  - fonctions symétriques des racines d'un polynôme, relations coefficients racines
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:
  - polynôme irréductible, caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
  - PGCD, PPCM de deux polynômes, puis d'une famille de polynômes, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, polynômes premiers entre eux
  - décomposition en produit de facteurs irrédutibles dans $\mathbb{R}[X]$ (on doit être capable de **justifier le résultat** en partant de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, en précisant que si z est racine de P alors $\overline{z}$ l'est aussi avec la même multiplicité, puis en calculant le produit $(X-z)(X-\overline{z})$ pour faire apparaitre les coefficients réels)
- polynômes interpolateurs de Lagrange
- **formule de Taylor pour les polynômes** (on a fait la démonstration dans le cas où $P = X^i$ puis très rapidement invoqué la linéarité pour justifier le cas général).

Prévisions pour la semaine suivante : dérivation.