Programme de colle n$^{\text{o}}$ 15

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 24/01 au 28/01 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 11 : Calcul matriciel.

- Calcul matriciel élémentaire :
  - — définition des matrices et notation des ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vocabulaire de base (taille d'une matrice, matrices carrées, diagonales, triangulaires, matrices nulles, matrices identité I_n)
  - — somme de matrices, produit d'une matrice par une constante, combinaisons linéaires de matrices, produit matriciel, propriétés (à savoir démontrer : **le produit d'une matrice A par une matrice identité de taille compatible est égal à A**)
  - — transposition, matrices symétriques et antisymétriques
  - — puissances d'une matrice carrée, exemples de calculs de puissances à l'aide de suites récurrentes (typiquement en partant d'une relation du type $A^2 = aA + bI_3$), matrices nilpotentes, formule du binôme de Newton matricielle et exemples
  - — trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
  - — inversion de matrices : définition, propriétés élémentaires (unicité, inverse d'un produit de matrices inversibles), opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (et interprétation en termes de multiplication à gauche par des matrices de transvection ou de dilatation), algorithme du pivot de Gauss d'inversion d'une matrice (le calcul explicite de l'inverse peut être présenté au choix sous forme matricielle classique, avec une matrice augmentée, ou en exploitant la résolution d'un système), exemples de calculs d'inverse exploitant un polynôme annulateur de la matrice
- Compléments sur les systèmes linéaires :
  - — écriture matricielle d'un système linéaire, résolution d'un système de taille quelconque via l'algorithme du pivot de Gauss (là aussi on pourra effectuer une résolution exploitant une matrice augmentée, ou une résolution « mixte » consistant à triangulariser une matrice augmentée avant de revenir à la résolution d'un système), écriture des solutions du système dans le cas où ce n'est pas un système de Cramer

Chapitre 12 : Continuité.

- Limites de fonctions :
  - — définition des différents types de limites (finies, infinies, quand x tend vers $\pm\infty$, quand x tend vers a)
  - — composition de limites
  - — caractérisation séquentielle de la limite (utilisée pour prouver que des fonctions du type $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admettent pas de limite en 0)
  - — limites à gauche et à droite
  - — existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones
- Définition de la continuité en un point et sur un intervalle, stabilité par les différentes opérations usuelles, continuité à droite et à gauche, prolongement par continuité d'une fonction admettant une limite finie en un point, fonctions Lipschitziennes.
- **Théorème des valeurs intermédiaires** et conséquences (théorème de la bijection, **théorème du maximum** (au moins le schéma de la preuve et notamment l'utilisation de Bolzano-Weierstraß), toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone).
- Méthode de dichotomie pour la détermination d'une valeur approchée d'une solution d'équation de la forme $f(x) = 0$ quand f est continue.
- Exemples d'étude de suites implicites. Aucun théorème spécifique à ce sujet, mais pour une suite définie par une condition du type $f_n(u_n) = 0$, on doit savoir :
  - — majorer ou minorer la suite par un réel en calculant l'image de ce réel par f_n
  - — étudier la monotonie de la suite en passant par le signe de $f_n(u_{n+1})$
  - — passer l'équation de définition de la suite à la limite pour obtenir la limite de la suite implicite, en exploitant éventuellement un raisonnement par l'absurde

Prévisions pour la semaine suivante : polynômes.