

Programme de colle n° 13

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 10/01 au 14/01 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 9 : Suites numériques.

- Compléments sur la structure de l'ensemble \mathbb{R} : droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, intervalles de \mathbb{R} , voisinages d'un élément de \mathbb{R} ou de $\overline{\mathbb{R}}$ (notions définies pour éclairer les définitions ultérieures sur les limites mais qui ne sont jamais réellement exploitées en pratique ; j'ai également profité de l'occasion pour donner un peu de vocabulaire topologique : ouvert, fermé, intérieur, adhérence), sous-ensembles denses de \mathbb{R} , densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .
- Notations générales sur les suites (terme général, terme d'indice n d'une suite, on fera évidemment attention à ne pas confondre u_n et (u_n)), différents types de définition possibles d'une suite (formule explicite, relation de récurrence simple, double ou pire, définition implicite).
- Vocabulaire général sur les suites (suites monotones, suites majorées, minorées, bornées, stationnaires).
- Suites usuelles :
 - suites arithmétiques : définition par récurrence, **formule explicite pour le terme général**, monotonie, **sommes partielles**
 - suites géométriques : définition par récurrence, formule explicite, monotonie, sommes partielles
 - suites arithmético-géométriques : équation de point fixe associée, calcul du terme général de la suite (on doit vérifier à chaque fois que la suite auxiliaire définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique)
 - suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : équation caractéristique, formules pour le calcul du terme général (l'analogie avec les équations différentielles, tout comme dans le cas des suites arithmético-géométriques, a été soulignée, mais aucune connaissance n'est exigible dans le cas de « seconds membres » pour ces équations, les élèves devront être guidés si vous souhaitez poser ce genre d'exercices)
- Limites de suites :
 - définition des limites (finies et infinies) « avec des ε », exemples très simples de manipulation
 - **unicité de la limite**
 - sous-suites, convergence des sous-suites d'une suite convergente, si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l alors (u_n) converge vers l
 - **théorème de convergence monotone**, théorème de Bolzano-Weierstraß

- résultats classiques sur les manipulations des limites (sommes, produits, inverse, on peut demander **la démonstration de la limite d'une somme ou d'un produit dans le cas de limites finies**), limites de suites arithmétiques et géométriques
- les résultats classiques du type croissance comparée ont été évoqués sans être réellement revus, mais ils sont bien sûr censés être maîtrisés par les élèves
- théorèmes de comparaison, théorème des gendarmes
- suites adjacentes, définition et **théorème de convergence**
- application aux approximations décimales d'un réel

Chapitre 10 : Arithmétique.

- Divisibilité dans \mathbb{Z} , **théorème de division euclidienne**, nombres premiers (existence d'une infinité de nombres premiers, crible d'Eratosthène), congruences dans \mathbb{Z} .
- Pgcd, ppcm (y compris d'une famille d'entiers), notation $n \wedge p$ et $n \vee p$, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, entiers premiers entre eux, premiers entre eux dans leur ensemble.
- Valuations p -adique, additivité des valuations p -adiques, théorème de décomposition en facteurs premiers, calcul du pgcd et du ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers et formule $(n \wedge p) \times (n \vee p) = n \times p$, **petit théorème de Fermat**.

Prévisions pour la semaine suivante : calcul matriciel.