Georg Cantor

1845-1918

Sa vie.

Fils d'un riche commerçant danois et d'une autrichienne issue d'une famille de musiciens (il sera lui-même un excellent violoniste amateur), Georg Cantor est né et a passé les premières années de sa vie à Saint-Petersbourg, puis s'est installé avec sa famille en Allemagne avant de faire des études scientifiques à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich en Suisse. Curieusement pour un homme a priori aussi cosmopolite, il passera ensuite l'intégralité de sa carrière dans la modeste université de Halle, en Allemagne. Ses premiers travaux sur les séries de Fourier l'amènent à s'intéresser plus particulièrement au concept d'infini, et à développer des idées révolutionnaires qui sont à l'origine de ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des ensembles. Ses travaux dans ce domaine se heurtent toutefois à la réticence de plusieurs grands mathématiciens de l'éqpoue, en tête desquels se trouve Leopold Kronecker avec qui Cantor entretiendra toujours des relations difficiles. La seconde moitié de la vie de Cantor sera marquée par des épisodes de dépression de plus en plus fréquents et marqués, le mathématicien souffrant d'une forme de schizophrénie qui l'empêchera notamment de continuer la recherche mathématique. Il meurt quelques mois avant la fin de la première guerre mondiale dans le dénuement.

Son oeuvre.

Cantor est avant tout célèbre pour ses travaux précurseurs de la théorie des ensembles. Il est le premier à comprendre l'importance fondamentale de la notion de bijection pour définir la notion de cardinal d'un ensemble infini, et en particulier à prouver (en 1874) que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne peuvent pas être mis en bijection. À la suite de cette découverte, il définit les nombres cardinaux et ordinaux et leur arithmétique (il s'agit en gros de faire du calcul avec les différents infinis mathématiques), introduisant notamment les notations $\aleph$ et ω encore utilisées de nos jours. Ces notions seront particulièrement exploitées au 20ème siècle dans une nouvelle branche des mathématiques appelée logique, qui s'intéresse aux fondements axiomatiques des mathématiques. Ainsi, l'une des conjectures les plus connues de Cantor est l'**hypothèse du continu** : il n'existe aucun ensemble « intermédiaire » entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ (autrement dit, aucun ensemble Z tel que $\mathbb{N} \subset Z \subset \mathbb{R}$ qui ne soit en bijection ni avec $\mathbb{N}$ ni avec $\mathbb{R}$). Il faudra attendre 1963 pour que Paul Cohen prouve que cette hypothèse est indécidable dans la théorie standard des ensembles (on peut la supposer vraie ou fausse au choix, sans créer de contradiction dans la théorie), un résultat particulièrement perturbant concernant notre intuition de ce qu'est vraiment l'ensemble des nombres réels.

Sa postérité.

Sans surprise, on retrouve le nom de Cantor associé à un certain nombre de résultats de théorie des ensembles. L'argument initial utilisé par Cantor pour démontrer la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$, connu sous le nom d'**argument diagonal de Cantor**, a été généralisé pour donner naissance au **théorème de Cantor**, qui stipule que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E (notation introduite par Cantor !) ne peut jamais être mis en bijection avec E. Son nom est également associé à quelques constructions remarquables en lien avec ses travaux sur les infinis (l'**escalier de Cantor**, fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable presque partout et de dérivée nulle partout où elle est dérivable, mais vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, l'**ensemble de Cantor** qui est l'un des premiers exemples de fractales étudiées en mathématiques), ainsi qu'au classique **théorème de Cantor-Bernstein** qui stipule que deux ensembles E et F pour lesquels il existe des applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ injectives peuvent être mis en bijection. Ce théorème a été introduit sans démonstration rigoureuse par Cantor avant d'être démontré quelques années plus tard par Bernstein.