# Chapitre 5 : Techniques de calcul algébrique.

MPSI Lycée Camille Jullian

11 octobre 2021

*La mathématique est une science dangereuse :*
*elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.*

Galilée.

*Ne tenez pour certain que ce qui est démontré.*

Isaac Newton.

Ce chapitre un peu fourre-tout est prétexte à regrouper diverses parties de cours visant à approfondir vos connaissances en termes de méthodes de calcul. La plupart des notions que nous y aborderons ne sont pas nouvelles, mais seront comme d'habitude présentées sous la forme la plus rigoureuse possible. Nous nous intéresserons plus précisément aux quatre domaines suivants dans ce chapitre : le principe de la démonstration par récurrence (et ses variations), les calculs de sommes et de produits, les outils élémentaires de dénombrement que sont les factorielles et les coefficients binômiaux, ainsi que la résolution de petits systèmes linéaires qui nous permettra d'introduire la méthode essentielle de l'algorithme du pivot de Gauss.

**Objectifs du chapitre :**

- comprendre réellement le principe de récurrence, et savoir l'appliquer dans toutes les situations où on peut en avoir besoin (mais aussi ne PAS l'appliquer dans les situations auxquelles il ne se prête pas).
- maîtriser les calculs de sommes faisant intervenir les sommes classiques et autres techniques du type décalage d'indices ou sommes télescopiques, ainsi que la formule du binôme de Newton.
- savoir résoudre sans jamais faire d'erreur de calcul des systèmes à deux ou trois équations et deux ou trois inconnues.

## 1 Principe de récurrence et variations.

**Théorème 1.** Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

*Remarque* 1. Ce résultat fondamental pour la structure de l'ensemble $\mathbb{N}$ est plus un axiome qu'un réel théorème. On peut le compléter par le résultat de même nature suivant :

**Proposition 1.** Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un maximum.

**Proposition 2.** Principe de récurrence.
Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'énoncés mathématiques. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $P_0$ est vrai
- pour tout entier naturel $n$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

alors toutes les propriétés $P_n$ sont vraies.

*Démonstration.* C'est en fait équivalent au théorème énoncé précédemment. Notons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ est fausse}\}$. On procède par l'absurde, supposons donc que les propriétés ne sont pas toutes vraies, ce qui revient à dire que l'ensemble $A$ n'est pas vide. D'après le théorème précédent, il y a donc un entier $n_0$ qui est le plus petit élément de l'ensemble $A$. Cet entier ne peut pas être nul puisque $P_0$ est supposée vrai, on en déduit que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. La propriété $P_{n_0-1}$ est vraie puisque $n_0$ est le plus petit élément de $A$, mais $P_{n_0}$ est fausse. C'est impossible à cause de l'hypothèse $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, l'ensemble $A$ est donc vide, et les propriétés sont toutes vraies. □

Cette propriété sert également de pense-bête pour bien structurer la rédaction d'une démonstration par récurrence. On procède théoriquement en quatre étapes :

- **Énoncé** clair et précis des propriétés $P_n$ et du fait qu'on va réaliser une récurrence.
- **Initialisation** : on vérifie que $P_0$ est vraie (habituellement un calcul très simple).
- **Hérédité** : on suppose $P_n$ vraie pour un entier $n$ quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve $P_{n+1}$ à l'aide de cette hypothèse (si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est qu'on n'avait pas besoin de faire une récurrence !).
- **Conclusion** : En invoquant le principe de récurrence, on peut affirmer avoir démontré $P_n$ pour tout entier $n$.

**Exemple :** On considère la suite numérique définie de la façon suivante : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$. On souhaite prouver que cette suite est minorée par 2, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. Nous allons pour cela, bien évidemment, procéder par récurrence :

- **Énoncé** : Nous allons prouver par récurrence la propriété $P_n$ : $u_n > 2$.
- **Initialisation** : $u_0 = 4 > 2$, donc la propriété $P_0$ est vérifiée.
- **Hérédité** : Supposons désormais $P_n$ vraie, c-est-à-dire que $u_n > 2$, et essayons de prouver que $u_{n+1} > 2$. C'est en fait assez simple en partant de l'hypothèse de récurrence : $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n - 2} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2$.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la propriété $P_n$ est vrai pour tout entier $n$.

En pratique, il n'est pas nécessaire de nommer explicitement les différentes étapes de la rédaction de la récurrence, tant qu'elles sont toutes bel et bien présentes.

*Remarque* 2. Variations du principe de récurrence :
Le monde mathématique n'étant pas parfait, une récurrence classique n'est hélas pas toujours suffisante pour montrer certaines propriétés. Il faut donc être capable de modifier légèrement la structure dans certains cas :

- si on ne cherche à montrer $P_n$ que lorsque $n \geqslant n_0$ ($n_0$ étant un entier fixe dépendant du contexte), on peut toujours procéder par récurrence, mais en initialisant à $n_0$ (bien entendu, l'hypothèse de récurrence portera alors nécessairement sur un entier $n \geqslant n_0$).
- il est parfois nécessaire que l'hypothèse de récurrence porte non pas sur une valeur de $n$, mais sur deux valeurs consécutives. On peut alors effectuer une récurrence double : on vérifie $P_0$ et $P_1$ lors de l'étape d'initialisation, et on prouve $P_{n+2}$ à l'aide de $P_n$ et $P_{n+1}$ lors de l'hérédité (on peut de même effectuer des récurrences triples, quadruples, etc. en faisant une initialisation triple ou plus, et en prenant une hypothèse de récurrence triple ou plus ; dans tous les cas on ne démontre qu'une seule propriété lors de l'hérédité).
- on peut même avoir besoin pour prouver l'hérédité que la propriété soit vérifiée pour **tous** les entiers inférieurs (ou, plus fréquemment, on a par exemple besoin que $P_n$ et $P_2$ soient vérifiées pour démontrer $P_{n+1}$). Dans ce cas, on parle de récurrence forte : le plus simple est de modifier la définition de la propriété $P_n$ pour lui donner un énoncé commençant par $\forall k \leqslant n$. Ainsi, lorsqu'on suppose $P_n$ vérifiée, on a une relation vraie pour toutes les valeurs de $k$ inférieures ou égales à $n$ (les plus malins d'entre vous noteront d'ailleurs qu'on peut toujours rédiger une récurrence sous forme de récurrence forte, ça ne demande pas plus de travail et ça ne peut pas être moins efficace ; c'est toutefois un peu plus lourd et déconseillé sauf nécessité).

**Exemple :** On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, et on veut déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)$. Pour cela (ce n'est pas forcément la meilleure méthode, mais la plus simple pour nous pour l'instant), on calcule les termes suivants de la suite : $u_2 = 5$, $u_3 = 19$, $u_4 = 65$. Une inspiration soudaine nous fait conjecturer que $u_n = 3^n - 2^n$ (si on ne devine pas la formule, on ne pourra jamais faire de récurrence), ce qu'on va prouver par récurrence double. La formule est vraie pour $u_0$ : $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et pour $u_1$ : $3^1 - 2^1 = 1$. Supposons-là vérifiée pour $u_n$ et $u_{n+1}$, alors $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) = 15 \times 3^n - 10 \times 2^n - 6 \times 3^n + 5 \times 2^n = 9 \times 3^n - 4 \times 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}$. La formule est donc vérifiée au rang $n + 2$, le principe de récurrence double permet de conclure.

# 2 Sommes et produits.

## 2.1 Sommes classiques.

**Définition 1.** Le symbole $\sum$ sert en mathématiques à désigner une somme de termes « semblables » pouvant être décrits à l'aide d'un indice $i$ (très souvent un nombre entier). Plus précisément, la notation $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ se lit par exemple « somme pour $i$ variant de 1 à $n$ de $a_i$ » et peut se détailler de la façon suivante : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

*Remarque* 3. La notation est en fait exactement similaire à celle qu'on utilise pour les intégrales (ce qui est d'ailleurs tout à fait normal puisqu'une intégrale n'est rien d'autre qu'une « somme continue », d'ailleurs le symbole $\int$ est bel et bien à l'origine un 'S' comme somme). En particulier :

- Dans la mesure où l'opération de somme est commutative et associative, l'ordre des indices dans la somme n'a pas d'importance, et on peut aussi utiliser la notation $\sum_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$ pour désigner la somme $\sum_{i=1}^{i=n}$. On pourra même étendre la notation à des sommes du type $\sum_{i \in I} i$ pour un ensemble $I$ quelconque, pour désigner la somme de tous les éléments de $I$ (bien sûr, si $I$ n'est pas fini, on sort du cadre des sommes finies avec lesquelles on va travailler dans ce chapitre).

- La lettre $i$ est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. On choisit traditionnellement les lettres $i$, $j$, $k$, etc. pour les indices de sommes.
- Dans une somme, la variable muette prend toujours **toutes** les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale. Si on veut décrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme des entiers impairs compris entre 3 et 15, on ne peut pas écrire $\sum_{i=3}^{i=15} i$ (qui désignerait la somme de tous les entiers entre 3 et 15), il faudra écrire $\sum_{i=1}^{i=7}(2i+1)$.
- On ne rappelle pas systématiquement l'indice en haut de la somme puisqu'il s'agit nécessairement de la même variable qu'en-dessous de cette même somme. Ainsi, on écrira volontiers $\sum_{i=1}^{n} i^2$ plutôt que $\sum_{i=1}^{i=n} i^2$.

**Exemples** : $\sum_{i=0}^{n} 3 = 3(n+1)$ (attention à compter correctement le nombre de termes d'une telle somme). Plus généralement, $\sum_{i=p}^{n} a = a(n-p+1)$ si $a$ est une constante.

**Proposition 3.** Règles de calcul sur les sommes. On a le droit d'effectuer les opérations suivantes :

- factoriser par une constante : $\sum_{i=0}^{n} k \times a_i = k \sum_{i=0}^{n} a_i$.
- séparer ou regrouper des sommes de mêmes indices : $\sum_{i=0}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i$.
- appliquer la relation de Chasles : $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$.
- faire un changement d'indice, par exemple : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}$ (on a ici posé $j = i-1$, de façon générale les seuls choses qu'on a le droit de faire sont des décalages d'un nombre constant de valeurs, jamais une modification du genre $j = 2i$ qui transgresserait le principe « les indices prennent toujours toutes les valeurs entières possibles »).

*Remarque* 4. Encore une fois, ces propriétés sont les mêmes que pour les intégrales. Les deux premières peuvent être regroupées sous un même nom, on parle de linéarité du calcul de sommes (un terme que nous aurons tout le loisir d'expliquer plus en détail beaucoup plus tard cette année). La relation de Chasles est la même que pour les intégrales, mais il faut bien faire attention à ne pas compter deux fois le termes correspondant à l'indice frontière entre les deux sommes. Il existe un équivalent du changement d'indice sur les intégrales (qu'on appelle le changement de variable), mais c'est nettement plus complexe (nous l'étudierons dans le prochain chapitre).

Par contre, tenter de simplifier d'une façon ou d'une autre une somme de la forme $\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i$ est une très bonne manière de s'attacher la rancoeur tenace de votre professeur. De façon générale, les sommes et produits ne font pas bon ménage.

**Proposition 4.** Sommes classiques.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2$
- $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

*Démonstration.*

- Nous allons démontrer par récurrence que la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier $n$. Pour $n = 0$, nous avons à gauche une somme vide qui vaut donc 0, ce qui est cohérent avec la formule de droite (si vraiment ça ne vous plait pas d'avoir une somme vide, initialisez à $n = 1$). Supposons $P_n$ vraie pour un entier $n$ quelconque, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut alors effectuer le calcul suivant : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui prouve $P_{n+1}$. On conclut en invoquant le principe de récurrence.

- Nous allons ensuite prouver de même par récurrence la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n = 0$, c'est le même principe que ci-dessus. Supposons désormais $P_n$ vraie pour un entier $n$ quelconque, on peut alors écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, donc $P_{n+1}$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que $P_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

- Toujours sur le même modèle, prouvons par récurrence la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Je n'insiste pas plus lourdement sur l'initialisation, c'est toujours pareil. Supposons désormais $P_n$ vraie pour un entier $n$ quelconque, on peut alors écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, donc $P_{n+1}$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que $P_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

- Nous allons enfin prouver par récurrence la dernière propriété $P_n : \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pour $n = 0$, nous avons $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1$, et $\dfrac{1-q^1}{1-q} = 1$, donc $P_0$ est vérifiée. Supposons désormais

$P_n$ vraie pour une entier $n$ quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, donc $P_{n+1}$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que $P_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

□

*Remarque* 5. Il existe d'autres façons de démontrer ces formules. Heureusement d'ailleurs, puisque la démonstration par récurrence nécessite de déjà connaître la formule avant de pouvoir la démontrer. Parmi les méthodes célèbres pour la première somme, celle-ci est souvent citée comme ayant été découverte par Gauss à l'âge de deux ans et demi (à peu près, parfois un peu plus selon les sources). On écrit la somme dans un sens : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$, puis on écrit la même somme dans l'autre sens : $S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$, et on additionne les deux sommes terme à terme pour obtenir $2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$ dont on déduit immédiatement le résultat.

## 2.2 Compléments techniques concernant les calculs de sommes.

**Définition 2.** Une **somme télescopique** est une somme de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} - a_i$, que l'on peut simplifier sous la forme $a_{n+1} - a_0$.

En effet, presque tous les termes de la somme « se simplifient ». On peut l'écrire explicitement : $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i = (a_1 - a_0) + (a - 2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0$. On peut bien sûr rédiger les choses plus rigoureusement en faisant un décalage d'indices : $\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} - a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} - \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} - a_0 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = a_{n+1} - a_0$ (on a « sorti » des deux sommes les termes qui ne sont pas communs aux deux sommes pour ensuite les simplifier, ce qui est la technique habituelle pour gérer ces sommes télescopiques).

**Exemple :** considérons la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$. A priori pas évident à calculer, du moins tant qu'on a pas constaté que $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}$. On peut alors faire le calcul suivant :
$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Si la fin du calcul ne vous semble pas claire, on peut aussi voir les choses ainsi :
$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

**Exemple :** un exemple un peu plus compliqué est le calcul de $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3 + 3i^2 + 2i}$. Le seul espoir pour calculer ce genre de somme est de faire apparaitre un télescopage (on ne connait aucune formule permettant de calculer des sommes faisant intervenir des expressions polynômiales au dénominateur d'une fraction), ce qui sera en fait systématiquement le cas à condition d'arriver à « séparer » la fraction en plusieurs termes pouvant se télescoper. Il existe pour cela un théorème bien utile que nous recroiserons dans le prochain chapitre, celui de la **décomposition en éléments simples**. Comme ce théorème est assez moche à écnoncer dans sa version complète que nous verrons dans le chapitre consacré aux fractions rationnelles, je vous en donne pour l'instant une version simplifiée qui suffira largement pour les quelques applications que nous en ferons :

**Théorème 2.** Décomposition en éléments simples.

Si un polynôme $P$ peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\times(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)\dots(x^2+\beta_p x+\gamma_p)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des racines réelles deux à deux distinces, et tous les termes de la forme $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ sont des facteurs de degré 2 à discriminant strictement négatif tous distincts, alors il existe $n$ réels $(a_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ et $p$ couples de réels $(b_i, c_i)$ tels que $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{a_1}{x-\alpha_1} + \dots + \dfrac{a_n}{x-\alpha_n} + \dfrac{b_1 x + c_1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \dots + \dfrac{b_p x + c_p}{x^2+\beta_p x+\gamma_p}$.

La première étape de notre calcul consiste donc à factoriser notre dénominateur pour faire apparaitres les racines $\alpha_i$ du théorème. Ici, c'est facile : $i^3+3i^2+2i = i(i^2+3i+2) = i(i+1)(i+2)$, il n'y a que des facteurs de degré 1 qui nécessiteront une simple constante au numérateur. Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors qu'on peut trouver trois constantes $a$, $b$ et $c$ telles que $\dfrac{1}{i^3+3i^2+2i} = \dfrac{a}{i} + \dfrac{b}{i+1} + \dfrac{c}{i+2}$. Pour déterminer ces constantes, il existe des méthodes astucieuses, mais nous nous conterons pour l'instant d'une bête identification en mettant les termes du membre de droite de l'égalité au même dénominateur : $\dfrac{a}{i} + \dfrac{b}{i+1} + \dfrac{c}{i+2} = \dfrac{a(i+1)(i+2)+bi(i+2)+ci(c+1)}{i(i+1)(i+2)} = \dfrac{(a+b+c)i^2+(3a+2b+c)i+2a}{i^3+3i^2+2i}$. Le numérateur de cette fraction devant être constant égal à 1, nous n'avons pas d'autre choix que d'imposer les conditions $a+b+c = 3a+2b+c = 0$ et $2a = 1$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $b+c = -\dfrac{1}{2}$ et $2b+c = -\dfrac{3}{2}$, et une soustraction de ces deux équations donne $b = -1$, puis $c = \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $\dfrac{1}{i^3+3i^2+2i} = \dfrac{1}{2i} - \dfrac{1}{i+1} + \dfrac{1}{2(i+2)}$.

La dernière étape consiste à écrire le télescopage, qui va ici être nécessairement plus compliqué que dans l'exemple précédent puisqu'il va faire intervenir trois termes et non deux (on peut écrire une partie de la somme « avec des pointillés » pour bien visualiser ce qui se passe les premières fois). Les techniques sont toutefois toujours les mêmes, on effectue des décalages d'indices pour avoir la même expression dans chaque somme, puis on sort des sommes les termes qui n'apparaissent pas dans les trois sommes pour pouvoir les simplifier : $S_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2} - \left(\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}\right) + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}$.

**Exemple** : Les décompositions en éléments simples peuvent aussi servir à calculer des intégrales, comme on le verra plus en détail dans le prochain chapitre. Voici tout de même un premier exemple, avec le calcul de $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$. Le principal général sera le même, on va donc procéder à peu près aux mêmes étapes de calcul :

- on commence par factoriser le dénominateur, dont $x = 1$ est ici une racine évidente. On obtient sans réel calcul $x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+1)$, qu'on ne peut évidemment pas factoriser davantage puisque le second facteur $x^2+1$ n'admet pas de racine réelle.

- on effectue la décomposition en éléments simples : le théorème nous assure l'existence de trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$. Comme dans l'exemple précédent, on part de cette deuxième expression et on met tout au même dénominateur pour pouvoir faire ensuite une identification des coefficients : $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}=\dfrac{ax^2+a+(x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{(a+b)x^2+(c-b)x+a-c}{x^3-x^2+x-1}$. L'identification donne donc les trois conditions $a+b=0$, $c-b=1$ et $a-c=1$. En additionnant ces trois équations, on trouvé $a=1$, dont on déduit que $b=-1$ et $c=0$. Conclusion : $\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x^2+1}$.
- on calcule l'intégrale, les éléments « simples » étant théoriquement faciles à intégrer : $I=\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}\,dx=\left[\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_2^3=\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(10)+\frac{1}{2}\ln(5)=\frac{\ln(2)}{2}$.

**Définition 3.** Une **somme double** est une somme dépendant de deux indices, et habituellement notée sous la forme de deux sommes imbriquées, par exemple $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{j}$, ou sous la forme plus simple d'une seule somme à deux indices, comme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}$ (qui désigne exactement la même chose que la notation précédente). La somme double prise en exemple est une somme de $n^2$ termes qu'on peut représenter dans le tableau à double entrée suivant :

| $i\backslash j$ | 1 | 2 | 3 | $\dots$ | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\dots$ | $\frac{1}{n-1}$ | $\frac{1}{n}$ |
| 2 | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\dots$ | $\frac{2}{n-1}$ | $\frac{2}{n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n$ | $\frac{n}{2}$ | $\frac{n}{3}$ | $\dots$ | $\frac{n}{n-1}$ | 1 |

*Remarque* 6. Si on décide d'écrire la somme précédente en utilisant deux symboles somme, on peut au choix l'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\times\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$, ou sous la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\sum_{i=1}^{n} i$. On calculera en pratique d'abord la somme intérieure, ce qui influencer le choix de l'ordre des deux sommes. Dans certains cas, il sera même impossible de calculer la somme double en l'écrivant dans un sens, alors que le calcul est tout à fait faisable dans l'autre (ici, ça ne change rien, la somme dépendant de l'indice $j$ ne se calcule pas, qu'on la mette à l'intérieur ou à l'extérieur).

**Exemple :** On cherche à calculer la somme double $S_n=\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 3j$. La condition $j\leqslant i$ qui est imposée sur les deux indices de la somme revient à dire que, si on représente les termes de cette somme dans un tableau à double entrée comme ci-dessus, on ne prendra en compte que les termes situés sous la diagonale du tableau (diagonale incluse). On peut toujours écrire la somme double à l'aide de deux symboles somme en choisissant l'ordre des indices, mais attention à les écrire correctement, la condition $i\leqslant j$ apparaitra toujours dans la somme intérieure et jamais dans la somme extérieure. Autrement dit, on peut écrire au choix $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}3j$, ou $S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}3j$. Comme il est nettement plus pratique d'avoir des sommes démarrant à un indice fixe égal à 1 pour appliquer aisément les formules du cours, on préfèrera en pratique la première écriture.

On calcule donc $S_n = 3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} = 3\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2+i = \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{4} = \frac{(n+1)(2n^2+n+3n)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

**Exemple :** Si on inverse la condition sur les deux indices dans le calcul de somme double précédent, le résultat n'est plus du tout le même. En effet, $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 3j = \sum_{j=1}^{n} 3j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

### 2.3 Produits.

**Définition 4.** Suivant le même principe que pour les sommes, le symbole $\prod$ signifie « produit ». Par exemple, $\prod_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

**Proposition 5.** Les règles de calcul suivantes peuvent être utiles quand on manipule des produits :

- séparation ou regroupement de produits : $\prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i b_i$.
- relation de Chasles : $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{n} a_i$.
- changement d'indice : $\prod_{i=2}^{n+1} a_i = \prod_{j=1}^{n} a_{j+1}$

*Remarque* 7. Bien entendu, tenter de simplifier $\prod_{i=1}^{i=n}(a_i + b_i)$ serait une grave erreur que, j'en suis certain, vous ne commettrez pas deux fois (ni même une seule, si possible).
Il n'existe pas d'équivalent pour les produits de la factorisation par une constante, si on a une constante $a$ en facteur d'un produit contenant $n$ termes, c'est un facteur $a^n$ qu'on pourra sortir du produit en séparant simplement le produit en deux produits.

**Définition 5.** On appelle **factorielle** de l'entier naturel $n$, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

**Exemple** : Un exemple de calcul de produit peu évident pour terminer ce paragraphe. On veut écrire sous une forme simple le produit des $n$ premiers entiers impairs $P_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$. La meilleure méthode consiste à « boucher les trous » en multipliant (et en divisant pour compenser) par les entiers pairs, car un produit d'entiers pairs se gère beaucoup plus facilement (on peut mettre des 2 en facteur sur chaque terme !) :

$$P_n = 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n-1) = \frac{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$$
$$= \frac{(2n)!}{(2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2 \times (n-1)) \times (2 \times n)} = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}.$$

## 3 Formule du binôme de Newton.

Le but de cette partie du cours est de décrire une formule généralisant les identités remarquables bien connues pour $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$. Les coefficients intervenant dans cette formule générale sont des nombres qui interviennent dans énormément de domaines en mathématiques, et sont donc extrêmement importants. Suffisamment d'ailleurs pour qu'on leur donne un nom et qu'on les définisse rigoureusement :

**Définition 6.** Le **coefficient binômial** $\binom{n}{k}$ (ça se lit « $k$ parmi $n$ ») est le nombre entier $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

*Remarque* 8. Le fait qu'un tel quotient soit entier n'a rien d'évident a priori, mais il découle de l'interprétation suivante que nous reverrons dans le chapitre consacré au dénombrement (et qui explique également le nom donné au symbole utilisé pour écrire les coefficients binômiaux) : le nombre $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensemble à $k$ éléments dans un ensemble en contenant $n$ (autrement dit, le nombre de façons de choisir $k$ objets différents parmi $n$).

*Remarque* 9. Par convention, on décrètera que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ ou si $n < 0$.

**Proposition 6.** Quelques valeurs à connaitre :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$.
- $\forall n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

*Démonstration.* Il suffit à chaque fois de reprendre la définition des coefficients binômiaux comme quotients de factorielles, par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$ puisque $0! = 1$, ou encore $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

**Proposition 7.** Quelques formules faisant intervenir les coefficients binômiaux :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie des coefficients binômiaux).
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (formule sans nom).
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

*Démonstration.*

- La propriété de symétrie est très facile à démontrer : $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à $k$ éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments.
- Pour la formule « sans nom », on passe par le calcul : $k\binom{n}{k} = \dfrac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.
- Enfin, la formule de Pascal est tellement fondamentale qu'on va en donner deux démonstrations distinctes. D'abord via un calcul brutal de mise au même dénominateur : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!}$
$= \dfrac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.
Ensuite on peut encore effectuer une démonstration combinatoire. Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments et $x$ un élément fixé de $E$. Les sous-ensembles de $E$ à $k$ éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent $x$, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans $E$ une fois $x$ choisi ; et ceux qui ne contiennent pas $x$, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci $k$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule.

□

**Triangle de Pascal :** La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire (chaque coefficient du tableau est la somme de celui qui se trouve juste au-dessus de lui et de celui qui se trouve à gauche du précédent) :

| | $k=0$ | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | $k=5$ | $k=6$ | $k=7$ | $k=8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| $n=5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| $n=6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| $n=7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| $n=8$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

**Théorème 3.** Formule du binôme de Newton.
Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

*Remarque* 10. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

**Exemple :** $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-2x)^5 = 1 - 5 \times 2x + 10 \times (2x)^2 - 10 \times (2x)^3 + 5 \times (2x)^4 - (2x)^5 = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^5 - 32x^5$.

*Démonstration.* On va procéder par récurrence sur l'entier $n$. Pour $n = 0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons maintenant la formule vraie au rang $n$, alors

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{(développement du produit par } a+b\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{(changement d'indice dans la première somme)} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&\qquad \text{(isolement d'un terme dans chaque somme)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} && \text{(relation de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{(insertion des termes extrêmes dans la somme)}
\end{aligned}
$$

□

**Proposition 8.** $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

*Démonstration.* Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.

Encore une fois, on peut aussi voir les choses de façon plus combinatoire : la somme qu'on cherche à calculer représente le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à $n$ éléments (on additionne le nombre de sous-ensembles à $k$ éléments pour toutes les valeurs de $k$ possibles). Pour construire un tel sous-ensemble (sans fixer le nombre d'éléments), on doit faire un choix binaire pour chaque élément de l'ensemble (soit on le prend dans le sous-ensemble, soit on ne le prend pas), ce qui donne bien $2^n$ possibilités. □

**Proposition 9.** Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}$.

*Démonstration.* Cette formule généralise l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. On peut à nouveau effectuer une preuve par récurrence, mais il existe ici une méthode un peu plus brutale et directe. Si $a = b$, la formule est triviale puisque les deux membres de l'égalité sont nuls. Sinon, on peut écrire $\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = \dfrac{a^{n+1}(1-(\frac{b}{a})^{n+1})}{a(1-\frac{b}{a})}$ et on reconnait une formule de somme géométrique : $\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = a^n \sum_{i=0}^{n} \left(\dfrac{b}{a}\right)^i = \sum i = 0^n b^i a^{n-i}$ (quitte à retourner l'ordre de sommation, c'est bien la même formule que dans l'énoncé). □

## 4 Systèmes linéaires à deux ou trois inconnues.

**Définition 7.** Une **équation linéaire** à $n$ inconnues $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

**Définition 8.** Un **système** de $n$ équations linéaires à $p$ inconnues est constitué de $n$ équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Autrement dit, on note $a_{ij}$ le coefficient de l'inconnue $x_j$ dans la $i$-ème équation. Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur les systèmes linéaires de taille quelconque (en lien avec le calcul matriciel), mais nous allons nous concentrer pour l'instant sur de « petits » systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes de deux ou trois équations à autant d'inconnues (un système qui comporte le même nombre d'inconnues que d'équations est d'ailleurs appelé système **carré** pour des raisons évidentes).

**Définition 9.** Un système de trois équations à trois inconnue est **triangulaire** s'il est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c1z & = & \alpha \\ & & b_2y & + & c_2z & = & \beta \\ & & & & c_3z & = & \gamma \end{array} \right.$$

*Remarque* 11. On pourrait inverser le rôle des variables sans changer le caractère triangulaire du système. On pourrait aussi définir de la même façon un système triangulaire de deux équations à deux inconnues. L'intérêt évident de ces systèmes est qu'ils sont faciles à résoudre en « remontant » le système, c'est-à-dire en calculant la valeur de $z$, puis en la substituant dans la deuxième équation pour obtenir celle de $y$ et enfin trouver $x$ en remplaçant tout le reste dans la première équation. En fait, toutes les méthodes de résolutions de systèmes linéaires sont basées sur le même principe : transformer le système en système triangulaire.

**Définition 10.** Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

**Exemple :** Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

**Exemple :** Le système suivant (où on a simplement modifié le second membre par rapport au précédent) ne peut pas être un système de Cramer, mais cette fois il admet des solutions :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -1 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Cette fois, en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$, on obtient l'équation triviale $0 = 0$. La troisième ligne peut donc être supprimée sans modifier les solutions du système. La seule chose à faire ensuite est d'essayer d'exprimer certaines inconnues en fonction des autres (il ne reste plus assez d'équations pour une résolution complète). Ici, l'opération $2L_1 - L_2$ donne $9y - 7z = 7$, donc $z = \frac{9}{7}y - 1$. La première équation donne alors $x = 3 + 3z - 2y = 3 + \frac{27}{7}y - 3 - 2y = \frac{13}{7}y$. Autrement dit, les solutions du système peuvent s'écrire sous la forme $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{13}{7}y, y, \frac{9}{7}y - 1\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$.

**Définition 11.** Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

**Interprétation géométrique** : les petits systèmes linéaires ont une interprétation géométrique simple qui permet de comprendre les différents cas qui peuvent se produire lors de leur résolution. Ainsi, la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues revient à chercher les points d'intersection de deux droite $(D_1)$ et $(D_2)$ dans le plan (chacune des deux équations peut en effet être interprétée comme une équation de droite). On a alors trois possibilités :

- les deux droites sont confondues (c'est le cas où les deux équations du système sont proportionnelles), et l'ensemble des coordonnées des points de la droite sont donc solutions du système (il y a bien sûr une infinité de solutions).
- les deux droites sont strictement parallèles, le système est incompatible et n'a aucune solution.
- les deux droites ne sont pas parallèles et se coupent en un unique point, le système est un système de Cramer et on obtient un couple solution unique (c'est le cas le plus fréquent).

Dans le cas d'un système de trois équations à trois inconnues, c'est un peu plus compliqué puisqu'il s'agit cette fois d'obtenir l'intersection de trois plans dans l'espace. Là encore, les cas possibles sont en nombre assez limité :

- les deux premiers plans (ou deux autres parmi les trois) sont strictement parallèles, le système est incompatible et n'admet aucune solution.
- les deux premiers plans sont confondus, une des trois équations ne sert à rien et le système admettra une infinité de solutions, soit l'ensemble des coordonnées des points d'un plan si le troisième est aussi confondu avec les deux premiers, d'une droite dans le cas contraire.
- les deux premiers plans ne sont pas parallèles et se coupent suivant une droite qui elle est parallèle au troisième plan (c'est tout à fait possible sans qu'on soit dans un des deux premiers cas), on aura soit aucune solution (si la droite est strictement parallèle au troisième plan), soit une infinité de solutions si la droite est incluse dans le dernier plan (toute une droite de solutions).
- la droite d'intersection des deux premiers plans n'est pas parallèle au troisième, il y aura un unique triplet de solutions, c'est le cas où le système est de Cramer (cas de loin le plus fréquent en fait !).

**Définition 12.** Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont de trois types :

- échange de lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- produit d'une ligne par une constante non nulle, noté $L_i \leftarrow aL_i$, avec donc $a \neq 0$
- combinaison de deux lignes $L_i \leftarrow L_i + aL_j$, sans condition sur le réel $a$

**Proposition 10.** Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système le transforment en un système équivalent.

*Remarque* 12. Comme on va le voir, la méthode de résolution issue de l'algorithme du pivot de Gauss consiste à enchaîner des opérations élémentaires sur les lignes du système. Il est tout à fait autorisé d'effectuer plusieurs opérations simultanément, à condition qu'elles ne dépendent pas les unes des autres. Ainsi, effectuer les deux opérations $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ ne pose aucun problème puisqu'on modifie deux lignes différentes à partir d'une troisième ligne qui reste intacte. Par contre, effectuer en même temps les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, comme on le voit trop souvent sur les copies, revient à remplacer les deux lignes par deux équations équivalentes, et donc à « perdre » une des deux équations, ce qui est une grave erreur !

**Théorème 4.** Algorithme du pivot de Gauss.

On peut résoudre n'importe quel système de trois équations à trois inconnues en appliquant l'algorithme suivant :

- si nécessaire, on effectue des échanges de lignes pour avoir un coefficient non nul devant la variable $x$ dans la première équation
- à l'aide d'opérations du type $L_2 \leftarrow L_2 + aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + bL_1$, on élimine la variable $x$ dans les deux dernières équations
- si nécessaire, on élimine la variable $y$ de la dernière équation avec une opération du type $L_3 \leftarrow L_3 + cL_2$
- on remonte le système triangulaire ainsi obtenu

**Exemple :** On souhaite résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système de trois équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ -x & + & 3y & + & z & = & -2 \\ x & - & y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right.$$

Le coefficient de $x$ dans la première équation n'étant pas nul, on peut directement utiliser ce $2x$ (ce terme est appelé « pivot » de l'étape de calcul, d'où le nom de l'algorithme) pour éliminer la variable $x$ des deux autres équations en effectuant les deux opérations élémentaires $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ (normalement, on devrait plutôt calculer $L_2 + \frac{1}{2}L_1$, mais tout multiplier par 2 ne modifie pas les solutions et évite de traîner des fractions dans les calculs ultérieurs) et $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$. On obtient le système équivalent (on garde bien sûr la première équation qui servira à la fin à terminer la résolution) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & 7y & + & z & = & -5 \\ & & -3y & - & 3z & = & -3 \end{array}\right.$$

Pour rendre le système triangulaire, on peut ici se permettre de dévier légèrement de l'agorithme officiel pour éliminer la variable $z$ plutôt que $y$ dans la dernière équation, l'opération sera plus facile. On effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ pour trouver un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & 7y & + & z & = & -5 \\ & & 18y & & & = & -18 \end{array}\right.$$

Il ne reste plus qu'à remonter le système : $y = -1$, puis $z = -5 - 7y = 2$ et enfin $x = \dfrac{-1+z-y}{2} = 1$. On conclut : le système est un système de Cramer et $\mathcal{S} = \{(1, -1, 2)\}$.

**Exemple :** Un **système à paramètres** est un système faisant intervenir des valeurs non explicites en plus des inconnues proprement dites du système. Le but est alors de calculer les valeurs des inconnues (comme d'habitude) exprimées en fonction du (ou des) paramètre(s) intervenant dans le système, en prenant bien soin de distinguer les éventuelles valeurs des paramètres pour lesquelles le système n'a pas une solution unique (il est en particulier très dangereux d'effectuer dans ce genre de système des combinaisons de ligne où on multiplie la ligne modifiée par un coefficient dépendant du paramètre, et qui risque donc de s'annuler). Un exemple où un pivot classique fonctionne bien (dans tout ce qui suit, $m$ est un paramètre réel) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \Leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \Leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ & & & & (m-m^3)z & = & 1-m^2 \\ & & (1+m^2)y & - & 2m^3z & = & -1-m^2 \end{array}\right.$$

Le système étant déjà triangulaire, les seules valeurs de $m$ pour lesquelles il ne sera pas de Cramer sont celles qui annulent un des coefficients « diagonaux » du système. Ici, $1 + m^2$ (coefficient de $y$ dans la dernière équation) n'est jamais nul, mais $m - m^3$ s'annule lorsque $m = 0$, $m = 1$ et $m = -1$, ce qui force à étudier pas moins de trois cas particuliers :

- si $m = 0$, l'équation médiane devient $0 = 1$, le système est donc incompatible et $\mathcal{S} = \emptyset$.
- si $m = 1$, l'équation médiane $0 = 0$ peut être oubliée, la dernière équation devient $2y - 2z = -2$, soit $y = z - 1$, et la première donne $x = 1 + y - z = 0$, donc il y a une infinité de solutions et $\mathcal{S} = \{(0, z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
- si $m = -1$, l'équation médiane donne à nouveau $0 = 0$, la dernière équation devient $2y + 2z = -2$, soit $y = -z - 1$, et la première donne $x = -1 - y - z = 0$, donc il y a une infinité de solutions et $\mathcal{S} = \{(0, -z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, dans le cas général (si $m \notin \{-1, 0, 1\}$), on remonte le système : $z = \dfrac{1-m^2}{m-m^3} = \dfrac{1}{m}$, puis $y = \dfrac{-1-m^2+2m^3z}{1+m^2} = \dfrac{m^2-1}{1+m^2}$, et enfin $x = m + my - m^2z = my = \dfrac{m^3-m}{1+m^2}$. On a donc $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{m^3-m}{1+m^2}, \dfrac{m^2-1}{1+m^2}, \dfrac{1}{m}\right)\right\}$.