Interrogation Écrite n° 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 mai 2022

1. La fraction admet trois pôles simples : 0, 1 et -1, donc une décomposition de la forme $F_1 = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$. Histoire de faire les malins, on peut constater que la fraction est impaire, donc $F(-X) = -\dfrac{a}{X} - \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{1-X} = -F(X)$, ce qui impose $b = c$. Sinon, on calcule simplement les trois coefficients en multipliant et en évaluant : la multiplication par X donne $a = -1$, celle par $X-1$ donne $b = \dfrac{2}{2} = 1$, et celle par $X-1$ donne $c = \dfrac{2}{2} = 1$. Finalement, $F_1 = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{X+1}$.
2. On a cette fois-ci deux pôles complexes égaux à i et $-i$, mais aussi une partie entière à calculer. Pour celle-ci, on peut tricher un peu : $X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1)$ donc $X^4 = (X^2-1)(X^2+1)+1$, et le quotient de la division de X^4 par X^2+1 est donc égal à X^2-1. Pour les parties polaires associées à i et $-i$, le plus rapide est probable de calculer $\dfrac{P}{Q'} = \dfrac{X^4}{2X} = \dfrac{1}{2}X^3$, ce qui donne des numérateurs égaux à $\dfrac{1}{2}i^3 = -\dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{1}{2}(-i)^3 = \dfrac{1}{2}i$ (ils sont sans surprise conjugués). Conclusion : $\dfrac{X^4}{X^2+1} = X^2 - 1 - \dfrac{i}{2(X-i)} + \dfrac{i}{2(X+i)}$.
3. Commençons par faire le calcul dans $\mathbb{C}(X)$, où la fraction admet pour pôles simples 1, -1, i et $-i$ et donc une décomposition de la forme $\dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X-i} + \dfrac{\overline{c}}{X+i}$. Là encore on ira plus vite en calculant $\dfrac{P}{Q'} = \dfrac{X^2}{4X^3} = \dfrac{1}{4X}$. Les évaluations sont triviales, et donnent $F_3 = \dfrac{1}{4(X-1)} - \dfrac{1}{4(X+1)} - \dfrac{i}{4(X-i)} + \dfrac{i}{4(X+i)}$. Le regroupement des deux derniers termes donne la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$: $F_3 = \dfrac{1}{4(X-1)} - \dfrac{1}{4(X+1)} + \dfrac{1}{2(X^2+1)}$.
4. Ici, le plus simple est de procéder à deux divisions euclidiennes successives :

$$
\begin{array}{cccccccccccc|l}
 & X^5 & & & & & & & & & - & 1 & \underline{X^2 - X + 2} \\
- & (X^5 & - & X^4 & + & 2X^3) & & & & & & & X^3 + X^2 - X - 3 \\
 & & & X^4 & - & 2X^3 & & & & & - & 1 & \\
 & & - & (X^4 & - & X^3 & + & 2X^2) & & & & & \\
 & & & & - & X^3 & - & 2X^2 & & & - & 1 & \\
 & & & & + & (X^3 & - & X^2 & + & 2X) & & & \\
 & & & & & & - & 3X^2 & + & 2X & - & 1 & \\
 & & & & & & + & (3X^2 & - & 3X & + & 6) & \\
 & & & & & & & & - & X & + & 5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|c}
 & X^3 & + & X^2 & - & X & - & 3 & X^2-X+2 \\
\cline{9-9}
- & (X^3 & - & X^2 & + & 2X) & & & X+2 \\
 & & & 2X^2 & - & 3X & - & 3 & \\
 & & - & (2X^2 & - & 2X & + & 4) & \\
 & & & & - & X & - & 7 &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^5-1=5-X+(-X-7)(X^2-X+2)+(X+2)(X^2-X+2)^2$, donc $F_4=X+2-\dfrac{X+7}{X^2-X+2}+\dfrac{5-X}{(X^2-X+2)^2}$

5. Pas de partie entière à calculer, on aura une décomposition de la forme $\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{(X-2)^2}+\dfrac{c}{X}+\dfrac{d}{X^2}$. Plein de méthodes possibles pour calculer les quatre coefficients, on peut par exemple commencer par gérer le pôle double 2 en calculant $G=(X-2)^2F_5=\dfrac{X^3+X^2+X+1}{X^2}=X+1+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X^2}$, donc $G'=1-\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{2}{X^3}$, dont on déduit facilement $b=G(2)=154$ et $a=G'(1)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{2}$. On calcule également facilement le coefficient d en multipliant par X^2 avant d'évaluer en 0 : $d=\dfrac{1}{4}$. Enfin, on peut multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$ pour avoir la condition $1=a+c$ donc $c=1-a=\dfrac{1}{2}$. Finalement, $F_5=\dfrac{1}{2(X-2)}+\dfrac{15}{4(X-2)^2}+\dfrac{1}{2X}+\dfrac{1}{4X^2}$.