Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mars 2022

Exercice 1

Chercons donc s'il existe une combinaison linéaire non triviale annulant les trois vecteurs : si $a(2,-2,1)+b(1,-3,1)+c(4,0,1)$, alors (a,b,c) sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & + & 4c & = & 0 \\ -2a & - & 3b & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$.

La combinaison $L_1 - L_3$ donne alors $a + 3c = 0$, donc $c = -\frac{1}{3}a$. La deuxième équation donnant directement $b = -\frac{2}{3}a$, on peut tout remplacer dans L_3 pour trouver $a - \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = 0$, équation qui est toujours vérifiée. Le système n'est donc pas un système de Cramer, il a par exemple pour solution non triviale $a = 3$, $b = -2$ et $c = -1$ (ce qui revient à dire, en notant u, v et w les trois vecteurs de la famille, que $w = 3u - 2v$), et la famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas libre. Comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, son caractère générateur est équivalent à sa liberté, donc elle n'est pas génératrice non plus.

Exercice 2

On a de façon évident $f^2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ce qui prouve que $f^2 = \mathrm{id}_E$ et donc que f est bien une symétrie de l'espace E. L'espace F par rapport auquel on symétrise est constitué des matrices invariantes par f (autrement dit, $M \in F \Leftrightarrow M \in \ker(f - \mathrm{id}) \Leftrightarrow f(M) = M$). En notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on doit avoir $a = d$ et $b = c$, d'où $F = \mathrm{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. De même, l'espace parallèlement auquel on symétrise est constitué des matrices vérifiant $f(M) = -M$, donc $d = -a$ et $c = -b$, soit $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 3

1. En notant F une primitive quelconque de f sur $\mathbb{R}$, on a $\varphi(f)(x) = F(x) - F(x-1)$, ce qui définit bien une fonction continue appartenant donc à E. De plus, la linéarité de l'intégrale prouve facilement celle de φ : $\varphi(\lambda f + g) : x \mapsto \int_{x-1}^{x} (\lambda f(t) + g(t))\ dt = \lambda \int_{x-1}^{x} f(t)\ dt + \int_{x-1}^{x} g(t)\ dt = \lambda\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$.
2. Si $f \in \ker(\varphi)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = 0$, donc en particulier, pour $x = 1$, $\int_0^1 f(t)\ dt = 0$. De plus, en reprenant l'expression donnée dans la première question, on aura toujours $F(x) - F(x-1) = 0$, ce qui prouve que toutes les primitives de f sont des fonctions périodiques de période 1. Lé dérivation conservant la périodicité (c'est évident, les taux d'accroissement en x et en $x+1$ seront exactement les mêmes, et auront donc la même limite en 0), f est elle-même 1-périodique.

3. Supposons f périodique de période 1, alors $\varphi(f)$ est une fonction dérivable, de dérivée égale à $f(x) - f(x-1)$ (toujours en reprenant la formule de la première question), donc un dérivée nulle. Cela montre que $\varphi(f)$ est une fonction constante. Comme elle vérifie par hypothèse $\varphi(f)(1) = 0$, elle est donc nulle et $f \in \ker(\varphi)$. La réciproque est donc vraie.
4. Il n'est pas du tout injectif puisque son noyau contient toutes les fonctions 1-périodiques d'intégrale nulle sur une période, et il existe énormément de telles fonctions. Par exemple $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$ en est une. Le morphisme φ ne peut pas être non plus surjectif, car $\varphi(f)$ est toujours une fonction dérivable, et il existe des fonctions dans E qui ne le sont pas. Par exemple, la fonction valeur absolue ne peut pas avoir d'antécédent par φ.
5. La restriction reste bien sûr linéaire, mais il faut vérifier que l'image d'un polynôme de degré 2 est également dans F. Posons donc $f(x) = ax^2 + bx + c$ et calculons $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} at^2 + bt + c\ dt = \left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct\right]_{x-1}^{x} = \frac{a}{3}(x^2 - (x-1)^3) + \frac{b}{2}(x^2 - (x-1)^2) + c(x - x(x-1)) = \frac{a}{3}(3x^2 - 3x + 1) + \frac{b}{2}(2x-1) + c$, qui est bien dans F, donc notre restriction est un endomorphisme de F.
6. Pas besoin de refaire un calcul puisque ce sont des cas particuliers du calcul précédent : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = X - \frac{1}{2}$ et $\varphi(X^2) = X^2 - X + \frac{1}{3}$.
7. La famille $\left(1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{3}\right)$ est échelonnée dans F et constituée de trois polynômes, c'est donc une base de F. Cela prouve que $\varphi_{|F}$ est surjectif. Comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un automorphisme (de toute façon, son noyau serait l'intersection avec F de celui de φ, et il n'existe aucun polynôme 1-périodique et d'intégrale nulle sur une période que le polynôme nul).