Interrogation Écrite n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mars 2022

Exercice 1

La famille $\mathcal{F} = ((2,-2,1),(1,-3,1),(4,0,1))$ est-elle une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$? Une famille génératrice ?

Exercice 2

On définit sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une application f par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que f est une symétrie, et donner ses éléments caractéristiques (espaces par rapport auquel et parallèlement auquel on effectue la symétrie).

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que, si $f \in \ker(\varphi)$, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, et f est périodique de période 1.
3. La réciproque de la propriété montrée à la question précédente est-elle vraie ?
4. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Surjectif ?
5. On restreint l'application φ au sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Montrer que cette restriction est un endomorphisme de F.
6. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.
7. Montrer que $\varphi_{|F}$ est un automorphisme.