Interrogation Écrite n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

28 février 2022

Énoncé :

- Calculer un DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.
- Calculer un DL à l'ordre 4 en 0 de $\ln^2(1+x)$.
- On pose $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et faire une étude locale de f au voisinage de 0.
- Effectuer l'étude locale de $g : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 1}$ en $+\infty$.

Correction :

1. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) + o(x^4) = x - x^2 + x^3 - x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4) = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + o(x^4)$
2. $\ln^2(1+x) = \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4\right)^2 + o(x^4) = x^2 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4) = x^2 - x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + o(x^4)$. Autre méthode, on constate que $\dfrac{1}{2}\ln^2(1+x)$ est la primitive s'annulant en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, donc en intégrant le DL pécédent, $\dfrac{1}{2}\ln^2(1+x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{11}{24}x^4 + o(x^4)$, ce qui donne bien sûr le même DL à l'arrivée.
3. Pour obtenir un DL à l'ordre 2 de la fonction f en 0, il faut commencer par développet numérateur et dénominateur à l'ordre 4 en anticipant la simplification par x^2 qui va se produire : $\dfrac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)} = \dfrac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4))}{(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4))^2} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24}x^2\right)\left(1 - \dfrac{2}{3}x^2\right) + o(x^2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$. On en déduit successivement les informations suivantes :
   - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de prolonger f par continuité en 0.
   - f admet un DL à l'ordre 1 en 0 (sans terme en x), ce qui prouve que le prolongement est dérivable en 0 et que la tangente à la courbe de f y est horizontale.
   - $f(x) - \dfrac{1}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{3}{8}x^2 < 0$, donc $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0 (courbe située en-dessous de sa tangente horizontale).
4. On commence par poser $X = \dfrac{1}{x}$ puis on écrit $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1 - X - X^3}{X^3}} = \dfrac{(1 - X - X^3)^{\frac{1}{3}}}{X}$. On connait le développement limité en 0 de la racine cubique : $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}u - \dfrac{1}{9}u^2 + o(u)$,

donc $g(x) = \dfrac{1}{X}\left(1 - \dfrac{1}{3}X - \dfrac{1}{9}X^2 + o(X^2)\right) = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{X}{9} + o(X)$, soit $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit les choses suivantes :

- $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $g(x) - \left(x - \dfrac{1}{3}\right) \sim -\dfrac{1}{9x}$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{3}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ (puisque la limite de la différence est nulle) et que la courbe est située en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (l'équivalent étant négatif dans un tel voisinage).