Interrogation Écrite n° 3 (sujet B) : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 novembre 2020

1. $I_1 = \int_1^3 \frac{1}{t^3}\,dt = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$
2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx = [-e^{\cos(x)}]_0^{\frac{\pi}{3}} = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}$
3. $I_3 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$

   On va effectuer le changement de variable subtil $t = e^{\sqrt{x}}$, soit $x = \ln^2(t)$, ce qui implique $dx = \frac{2\ln(t)}{t}\,dt$. Les bornes de l'intégrale vont par ailleurs être changées en $e^{\sqrt{0}} = 1$ et $e^{\sqrt{1}} = e$, donc $I_3 = \int_1^e 2\ln(t)\,dt = [2t\ln(t) - 2t]_1^e = 2e - 2e - 0 + 2 = 2$
4. $I_4 = \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3(x)\right]_1^e = \frac{1}{3}$
5. $I_5 = \int_0^1 \frac{t}{t^2-4}\,dt$

   On va bien entendu faire une décomposition en éléments simples :

   - le dénominateur se factorise tout seul en $(t-2)(t+2)$
   - on peut donc décomposer sous la forme $\frac{t}{t^2-4} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On calcule a et b par la méthode de son choix, par exemple en mettant au même dénominateur pour trouver $\frac{(a+b)t + 2a - 2b}{t^2-4}$, ce qui implique $a + b = 1$ et $a - b = 0$ donc $a = b = \frac{1}{2}$
   - on termine le calcul de l'intégrale : $I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(t-2)} + \frac{1}{2(t+2)}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(2-t) + \frac{1}{2}\ln(t+2)\right]_0^1 = \frac{\ln(3) - \ln(2) - \ln(2)}{2} = \frac{\ln(3)}{2} - \ln(2)$.