Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 3 (sujet A) : corrigé

MPSI Lycée Camille

12 novembre 2020

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = [2\sqrt{t}]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\, dx = [\ln(1+\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(1) = \ln(3) - \ln(2)$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\, dx$

   On va effectuer le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, soit $e^x - 1 = t^2$ et donc $x = \ln(t^2+1)$, ce qui implique $dx = \dfrac{2t}{t^2+1}\, dt$. Les bornes de l'intégrale deviennent $\sqrt{e^{\ln(2)} - 1} = 1$ et $\sqrt{e^{\ln(5)} - 1} = 2$, donc $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{t^2+1}{(t^2+4)t} \times \frac{2t}{t^2+1}\, dt = \int_1^2 \frac{2}{t^2+4}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2} = \left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_1^2 = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^2 = \sqrt{5} - 1$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3-t}{t^2+t-2}\, dt$

   On va bien sûr effectuer une décomposition en éléments simples ici :

   - $t^2 + t - 2$ se factorise de façon immédiate en $(t-1)(t+2)$ puisque 1 en est une racine évidente
   - on peut donc décomposer sous la forme $\dfrac{3-t}{t^2+t-2} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+2}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On peut par exemple calculer a et b à l'aide des astuces habituelles : multiplication par $t-1$ pour obtenir $\dfrac{3-t}{t+2} = a + \dfrac{b(t-1)}{t+2}$ puis on pose $t = 1$ et on trouve $a = \dfrac{2}{3}$; multiplication par $t+2$ puis $t = -2$ pour trouver $b = -\dfrac{5}{3}$
   - on termine le calcule : $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2}{3(t-1)} - \frac{5}{3(t+2)}\, dt = \left[\frac{2}{3}\ln(1-t) - \frac{5}{3}\ln(t+2)\right]_{-1}^0 = -\frac{2}{3}\ln(2) - \frac{5}{3}\ln(2) = -\frac{7}{3}\ln(2)$