Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 2

MPSI Lycée Camille Jullian

18 octobre 2021

Énoncé :

1. Résoudre de deux façons différentes l'équation $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.
2. Calculer (et simplifier) la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (sans se préoccuper du domaine dee définition ou de dérivabilité de la fonction).
3. Étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$ et tracer une allure de sa courbe représentative.

Corrigé :

1. Parmi les nombreuses méthodes possibles :
   - écrire que $\cos(3x) = -\cos(x) = \cos(\pi + x)$, donc on doit avoir $3x \equiv \pi + x[2\pi]$, ou $3x \equiv -\pi - x[2\pi]$, donc $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   - utiliser la formule de triplication du cosinus : $\cos(x) + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 0$, donc $2\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0$. On en déduit que $\cos(x) = 0$, ou $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis les solutions $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $x \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, $x \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, $x \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$, $x \equiv -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ (on peut regrouper ces quatre dernières pour retrouver la même forme qu'avec la première méthode).
   - faire savant et utiliser une transformation somme-produit : $2\cos(2x)\cos(-x) = 0$, donc $\cos(x) = 0$ ou $\cos(2x) = 0$, ce qui donne $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Posons donc $u(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, et calculons déjà $u'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$.
   On peut maintenant calculer la dérivée de la composée $\arccos \circ u$: $g'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \dfrac{2x}{|x|(1+x^2)}$ (donc on obtient en fait $\pm\dfrac{2}{1+x^2}$ selon le signe de x).
3. La fonction f est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique, on va restrindre son étude à l'intervalle $[0, \pi]$. Elle est dérivable, et $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$. Sur l'intervalle d'étude, $\sin(x) \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\cos(x)$, qui s'annule lorsque $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, donc pour $x = \dfrac{\pi}{3}$. Calculons les valeurs importantes pour compléter le tableau de variations : $f(0) = 1 - 2 = -1$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$ et $f(\pi) = 1 + 2 = 3$. D'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

Puis la courbe correspondante :