Interrogation Écrite n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

27 septembre 2021

Énoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation et l'équation suivante :

1. $|x+12| \leq |x^2-8|$
2. $x^3-2x^2-11x+12=0$

Corrigé :

1. Il va falloir faire un tableau pour exprimer la différence $|x+12|-|x^2-8| \leq 0$. La première valeur absolue s'annule pour $x=-12$, et la deuxième lorsque $x=\pm 2\sqrt{2}$.

x	$-\infty$ $\quad -12$	$\quad -2\sqrt{2}$	$\quad 2\sqrt{2}$	$\quad +\infty$
$\|x+12\|$	$-x-12$ $\quad 0$	$x+12$	$x+12$	$x+12$
$\|x^2-8\|$	x^2-8	x^2-8 $\quad 0$	$8-x^2$ $\quad 0$	x^2-8
$\|x+12\|-\|x^2-8\|$	$-x^2-x-4$	$-x^2+x+20$	x^2+x+12	$-x^2+x+20$

On résout désormais l'inéquation sur chacun des intervalles :

- sur $]-\infty,-12]$, le trinôme $-x^2-x-4$ a pour discriminant $\Delta=1-16<0$, donc le trinôme est toujours négatif, on garde tout l'intervalle $]-\infty,-12]$.
- sur $[-12,-2\sqrt{2}]$, le trinôme $-x^2+x+20$ a pour discriminant $\Delta=1+80=81$ et admet pour racines $x_1=\dfrac{-1-9}{-2}=5$ et $x_2=\dfrac{-1+9}{-2}=-4$. Comme ce trinôme est négatif à l'extérieur des racines, on garde uniquement l'intervalle $[-12,-4]$ (en effet, $-2\sqrt{2}\simeq -2.8>-4$).
- sur $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$, le trinôme x^2+x+12 a un discriminant strictement négatif, il est toujours positif, on ne garde rien.
- sur $[2\sqrt{2},+\infty[$, on a déjà étudié le trinôme, on garde donc également l'intervalle $[5,+\infty[$ (puisque $2\sqrt{2}<5$).

Conclusion : $\mathcal{S}=]-\infty,-4]\cup[5,+\infty[$.

2. L'équation admet $x=1$ comme solution évidente : $1-2-11+12=0$. On peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a=1$, puis $b-a=-2$ donc $b=-1$, $c-b=-11$ donc $c=-12$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. Le deuxième facteur x^2-x-12 a pour discriminant $\Delta=1+48=49$ et admet deux racines réelles $x_1=\dfrac{1-7}{2}=-3$ et $x_2=\dfrac{1+7}{2}=4$. Il ne reste qu'à conclure : $\mathcal{S}=\{-3,1,4\}$.