Devoir Surveillé n° 10 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

4 juin 2022

Exercice : probabilités (d'après EDHEC 2000).

1. Après avoir effectué deux lancers, on ne peut avoir eu au maximum qu'un seul changement, donc $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Un changement s'est produit si on a tiré P_1F_2 ou F_1P_2, donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = pq + qp = 2pq$, et $\mathbb{P}(X_2 = 0) = p^2 + q^2 = 1 - 2pq$. On peut résumer ces calculs dans le tableau suivant :

k	0	1
$\mathbb{P}(X_2 = k)$	$p^2 + q^2$	$2pq$

2. On aura cette fois-ci $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ (deux changements maximum après trois lancers). Pour avoir deux changements, il faut avoir tiré $P_1F_2P_3$ ou $F_1P_2F_3$, donc $\mathbb{P}(X_3 = 2) = p^2q + q^2p$. On n'aura aucun changement si on a tiré trois Piles ou trois Faces, donc $\mathbb{P}(X_3 = 0) = p^3 + q^3$. Enfin, les quatre derniers cas donneront un changement (PPF, FFP, PFF et FPP), ce qui donne $\mathbb{P}(X_3 = 1) = 2(p^2q + q^2p)$ (qu'on peut aussi obtenir par passage au complémentaire). Bref, la loi de X_3 est la suivante :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X_3 = k)$	$p^3 + q^3$	$2(p^2q + q^2p)$	$p^2q + q^2p$

On en déduit que $\mathbb{E}(X_3) = 2(p^2q + q^2p) + 2(p^2q + q^2p) = 4(p^2q + q^2p) = 4pq(p + q) = 4pq$, et $\mathbb{E}(X_3^2) = 6pq$, donc, via la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X_3) = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq)$, comme annoncé par l'énoncé.

3. On est repartis pour un tour : $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Comme précédemment, on aura $\mathbb{P}(X_4 = 0) = p^4 + q^4$ (que des Piles ou que des Faces), et $\mathbb{P}(X_4 = 3) = \mathbb{P}(P_1F_2P_3F_4) + \mathbb{P}(F_1P_2F_3P_4) = 2p^2q^2$. Il reste à répartir les douze cas restants sur les deux autres valeurs : on aura $X_4 = 1$ dans les cas suivants : $PFFF$, $PPFF$, $PPPF$, $FPPP$, $FFPP$ et $FFFP$, ce qui donne $\mathbb{P}(X_4 = 1) = 2(p^3q + p^2q^2 + q^3p)$. Les six autres cas donnent bien deux changements : $PFPP$, $FPFF$, $PFFP$, $FPPF$, $PPFP$ et $FFPF$. On constate que la probabilité est exactement la même que pour l'évènement $X = 1$.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X_4 = k)$	$p^4 + q^4$	$2(p^3q + p^2q^2 + pq^3)$	$2(p^3q + p^2q^2 + pq^3)$	$2p^2q^2$

Essayons de calculer l'espérance : $\mathbb{E}(X_4) = 2(p^3q + p^2q^2 + pq^3) + 4(p^3q + p^2q^2 + pq^3) + 6p^2q^2 = 6(p^3q + pq^3) + 12p^2q^2 = 6pq(p^2 + q^2 + 2pq) = 6pq(p + q)^2 = 6pq$. Surprenante simplification.

4. Pour ne pas avoir de changement, il faut ne tirer que des Piles ou que des Faces, donc $\mathbb{P}(X_n = 0) = p^n + q^n$.

5. Supposons pour commencer que notre série de lancers ait commencé par un Pile. On aura alors $X = 1$ s'il se produit un seul changement lors du lancer numéro k, pour un certain $k \in \{2, \dots, n\}$, ce qui revient à dire qu'on a eu une suite de lancers du type $P \dots PF \dots F$,

avec exactement $k-1$ Piles suivis de $n-k+1$ Faces. Quitte à renuméroter, on aura donc k Piles suivis de $n-k$ Faces, pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. On additionne la probabilité de tous ces cas pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k}$. De même, si notre premier lancer donne un Face, on aura tous les cas symétriques, qui donnent une probabilité globale égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} q^k p^{n-k}$. On remarque que les deux sommes obtenues sont égales, et donc que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} = 2pq\sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1}q^{n-1-k} = 2pq\sum_{k=0}^{n-2} p^k q^{n-2-k}$ après un petit changement d'indice. Or, si on connait bien ses identités remarquables, on sait que $p^{n-1} - q^{n-1} = (p-q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} p^k q^{n-k}$, la formule de l'énoncé en découle immédiatement si $p \neq q$.

6. Les deux seuls cas possibles sont ceux où on alterne en permence Piles et Faces, en commençant pas Pile ou par Face. Si n est pair, on aura dans chaqun des deux cas tiré $\frac{n}{2}$ Piles et $\frac{n}{2}$ Faces, donc $\mathbb{P}(X_n = n-1) = 2p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}$. Si par contre n est impair, le tirage commençant par Pile contiendra $\frac{n+1}{2}$ Piles et $\frac{n-1}{2}$ Faces (un Pile de plus que de Faces) et ce sera le contraire pour le tirage commençant par Face, donc $\mathbb{P}(X_n = n-1) = p^{\frac{n+1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}} + p^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n+1}{2}} = (pq)^{\frac{n-1}{2}} \times (p+q) = (pq)^{\frac{n-1}{2}}$
7. La variable Z_k est une variable de Bernoulli puisqu'elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. De plus, la valeur prise par Z_k ne dépend que de ce qui se passe aux lancers numéros k et $k-1$ (puisque tout est indépendant). On aura $Z_k = 1$ si ces deux lancers ont donné PF ou FP, donc $\mathbb{P}(Z_k = 1) = pq + qp = 2pq$, et $\mathbb{E}(Z_k) = 2pq$. Comme on a de façon évidente $X_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} Z_k$ (on compte simplement le nombre de changements), la linéarité de l'espérance permet d'affirmer que $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = (n-1) \times 2pq = (2n-2)pq$. Finalement, la simplification remarquée pour le calcul de $\mathbb{E}(X_4)$ n'était pas si étonnante que ça.
8. Dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$, les trois probabilités de la loi de X_3 deviennent $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, ce qui correspond à $X_3 \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Pour X_4, les quatre probabilités sont maintenant égales à $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$, donc $X_4 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$. C'est en fait tout à fait logique : dans ce cas, chaque changement a une probabilité $\frac{1}{2}$ de se produire (indépendamment les uns des autres), et on compte le nombre de changements obtenus après $n-1$ tentatives. On est dans une situation de schéma de Bernoulli, donc $X_n \sim \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$ (alternativement, on peut dire que X_n est la somme de $n-1$ variables de Bernoulli de même loi mutuellement indépendantes).

Problème 1 : algèbre linéaire (d'après Petites Mines 2003).

I. Étude d'une symétrie.

1. L'espace E est bien sûr de dimension 4 sur $\mathbb{C}$, mais de dimension 8 sur $\mathbb{R}$.

2. Il n'y a qu'à vérifier que $s(s(A)) = A$, ce qui est immédiat. On a donc $s^2 = id_E$, et s est bien une symétrie.
3. La matrice A appartient à $\ker(s - id)$ si $s(A) = A$, donc si ses coefficients vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} d & = & a \\ -b & = & b \\ -c & = & c \\ a & = & d \end{array}\right.$. La résolution de ce système devrait être à la portée de tout le monde : $b = c = 0$ et $a = d$, donc $\ker(s - id) = \text{Vect}(I)$. En particulier, $\dim(\ker(s - id)) = 1$. Or, on sait que, pour une symétrie, les sous-espaces vectoriels $\ker(s - id)$ et $\ker(s + id)$ sont supplémentaires. On en dduit directement que $\dim(\ker(s + id)) = \dim(E) - 1 = 3$.
4. Il s'agit d'une famille de quatre éléments dans un espace de dimension 4, il suffit donc de prouver qu'elle est libre. Supposons donc que $aI+bJ+cK+dL = 0$, alors (a, b, c, d) est solution du système $\left\{\begin{array}{rcrcl} a & - & id & = & 0 \\ -b & + & ic & = & 0 \\ b & + & ic & = & 0 \\ a & + & id & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes impliquent que $a = id = -id$, donc $d = a = 0$, les deux autres que $b = ic = -ic$, donc $b = c = 0$. Notre famille est bien libre, c'est donc une base de E. Pour déterminer la matrice de s dans cette base, contentons-nous de calculer les images de ces quatre matrices : $s(I) = I$, $s(J) = -J$, $s(K) = -K$ et $s(L) = -L$. Il s'agit donc en fait de quatre vecteurs propres de la symétrie s, qui aura donc pour matrice dans cette base $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. (a) Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$. Or, $s(B)s(A) = \begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hd+fc & -hb-fa \\ -gd-ce & gb+ea \end{pmatrix}$, c'est-à-dire exactement $s(AB)$.
   (b) C'est un calcul vraiment immédiat : $As(A) = \begin{pmatrix} ad+bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = (ad-bc)I = \det(A)I$.
   (c) Si A est inversible, alors $\det(A) \neq 0$, et le calcul précédent prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}s(A)$, mais aussi que $s(A)$ est inversible et que $(s(A))^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A$. On a donc $s(A) = \det(A)A^{-1}$, d'où $s(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}A$.
   (d) Encore un calcul facile : $s(A) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = -A + \text{Tr}(A)I$.

II. L'algèbre des quaternions.

1. En posant $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, on peut écrire $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix} = aI - bL + cJ + dK$, qui est bien une combinaison linéaire à coefficients réels. En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $H = \text{Vect}(I, J, K, L)$, et H est donc un sous-espace de dimension 4 de E (la famille (I, J, K, L) qui était libre sur $\mathbb{C}$ l'est a fortiori sur $\mathbb{R}$).
2. Calculons donc le produit $M(z_1, z_2)M(z_3, z_4) = \begin{pmatrix} z_1z_3 - \overline{z_2}z_4 & -z_1\overline{z_4} - \overline{z_2}\overline{z_3} \\ z_2z_3 + \overline{z_1}z_4 & -z_2\overline{z_4} + \overline{z_1}\overline{z_3} \end{pmatrix} = M(z_1z_3 - \overline{z_2}z_4, z_2z_3 - \overline{z_1}z_4)$, donc H est effectivement stable par produit matriciel.
3. Un calcul immédiat montre que $s(M(z_1, z_2)) = M(\overline{z_1}, -z_2)$, qui est effectivement une matrice appartenant à H. De plus, $\det(M(z_1, z_2)) = z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2$ est bien un réel positif.

4. Le déterminant calculé juste au-dessus ne peut s'annuler que si $|z_1| = |z_2| = 0$, donc si $M(z_1, z_2) = 0$. Si ce n'est pas le cas, on sait que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} s(M)$, avec $s(M) \in H$ (question 3), et H stable par produit extérieur par un réel (question 1), donc $M^{-1} \in H$.
5. On en a un certain nombre :
   - H est un espace vectoriel réel d'après la question 1, il n'est par contre par un espace vectoriel complexe (pas stable par produit par un complexe, par exemple $I \in H$, mais $iI \notin H$).
   - $(H, +)$ est un groupe commutatif (c'est une partie de la définition d'un espace vectoriel), et $(H \backslash \{0\}, \times)$ est un groupe (d'après les questions 2 et 4), mais qui n'est pas du tout commutatif. Par exemple $JK = L$ mais $KJ = -L$.
   - les deux structures précédentes font de $(H, +, \times)$ un anneau non commutatif, qui serait même un corps si on autorisait ces derniers à ne pas être commutatifs. Dans la définition vue en cours, on a imposé la commutativité, H n'est donc pas un corps (on appelle ce genre d'objet une algèbre à division).
6. En fait, ce n'est pas dur : en notant $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$, le calcul effectué plus haut montre que $\det(M(z_1, z_2)) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$. Supposons alors que $n = a^2+b^2+c^2+d^2$, on peut simplement constater que $n = \det(M(a+ib, c+id))$. De même, si p est somme de quatre carrées, alors $p = \det(M(a'+ib', c'+id'))$. Les propriétés du déterminant font alors que $np = \det(M(a+ib, c+id)M(a'+ib', c'+id'))$. Mais comme H est stable par produit matriciel et que toute matrice de H a un déterminant qui peut s'écrire comme somme de quatre carrés, on en déduit directement que np est lui aussi somme de quatre carrés (on a même des formules explicites pour les carrés en question en fonction de a, b, c, d, a', b', c' et d').

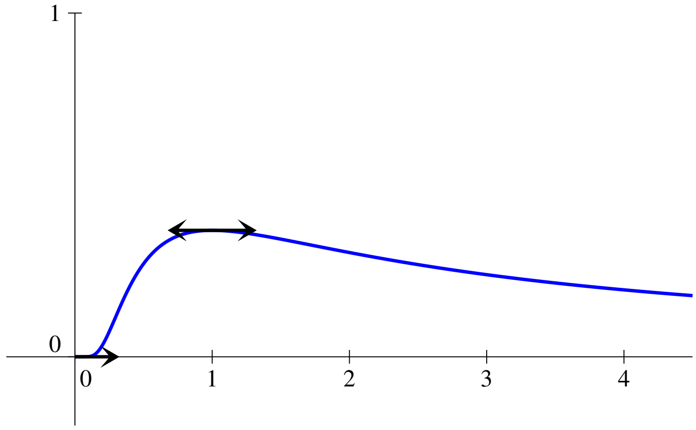
Problème 2 : analyse (d'après Petites Mines 2007).

A. Généralités.

1. En effet, $f'(t) = \dfrac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$, donc $tf'(t) = g(t)$.
2. En posant $T = \dfrac{1}{t}$, on peut écrire $g(t) = Te^{-T}$. Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} T = +\infty$, et $\lim\limits_{T \to +\infty} Te^{-T} = 0$ (croissance comparée), on a donc $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$, ce qui permet de prolonger g par continuité en 0. De plus, le taux d'accroissement en 0 de la fonction g devient $\tau_0(t) = \dfrac{f(t)}{t^2}$. On peut faire exactement le même changement de variable que ci-dessus pour obtenir $\tau_0(t) = T^2 e^{-T}$, qui a toujours une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée. La fonction g est donc dérivable en 0, et $g'(0) = 0$.
3. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(t) = -\dfrac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} + \dfrac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} = \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}(1-t)}{t^3}$. Cette dérivée est du signe de $1-t$, donc g est croissante sur $[0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$, avec pour maximum $g(1) = e^{-1}$. On peut donner le tableau complet suivant (pas de forme indéterminée pour le calcul de la limite en $+\infty$, qu'on ne détaillera donc pas) :

t	0		1		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Puis la courbe en n'oubliant pas la tangente horizontale en 0 :



4. Il s'agit donc de calculer $H(t) = \int_1^t xe^{-x}\,dx$. On va bien sûr effectuer une IPP en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{-x}$, qu'on peut intégrer en $v(x) = -e^{-x}$. On obtient alors $H(t) = [-xe^{-x}]_1^t + \int_1^t e^{-x}\,dx = -te^{-t} + \frac{1}{e} + [-e^{-x}]_1^x = -(t+1)e^{-t} + \frac{2}{e}$. Comme on nous demande un développement limité en 1, on va poser $u = t - 1$ histoire d'avoir u qui tend vers 0, et on calcule $H(t) = -(u+2)e^{-1-u} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e}(u+2)e^{-u} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e}(u + 2)\left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e}u - \frac{1}{e}\frac{u^3}{6} + o(u^3)$, soit $H(t) \underset{t\to 1}{=} \frac{t-1}{e} - \frac{(t-1)^3}{6e} + o((t-1)^2)$.

5. (a) L'équation (E_n) est équivalente à $g(t) = \frac{1}{n}$. Or, la fonction g est bijective de $[0,1[$ vers $[0, \frac{1}{e}[$. Lorsque $n \geqslant 3$, $\frac{1}{n} \in \left[0, \frac{1}{e}\right[$, donc l'équation $g(t) = \frac{1}{n}$ admet bien une unique solution sur l'intervalle $[0,1[$ (et même sur $]0,1[$ puisque $g(0) = 0$).

   (b) Par construction, α_n et α_{n+1} appartiennent à un intervalle où g est croissante, et $\frac{1}{n+1} = g(\alpha_n n + 1) < g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$. On en déduit que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ et donc que la suite (α_n) est décroissante. C'est exactement le même raisonnement pour β_n, mais on est cette fois-ci sur un intervalle où g est décroissante, ce qui donne une suite (β_n) croissante.

   (c) Supposons donc que $\lim \alpha_n = l > 0$. Alors, par continuité de la fonction g, on aurait $\lim g(\alpha_n) = g(l)$. Mais on sait dégà que $g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$, qui a une limite nulle. Comme aucun réel strictement positif ne vérifie $g(l) = 0$, l'hypothèse est absurde (le même raisonnement vaut aussi pour la suite (β_n)). La suite (α_n) étant décroissante minorée par 0, elle converge tout de même, mais on a donc nécessairement $\lim \alpha_n = 0$. La suite (β_n) étant croissante et minorée par 1 (donc ne pouvant pas avoir de limite), elle diverge vers $+\infty$.

B. Fonctions définies par des intégrales.

1. On sait que $f'(t) = \frac{g(t)}{t}$ et on a déjà prouvé plus haut que $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = 0$. On peut donc appliquer le théorème du prolongement de la dérivée pour affirmer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2. (a) Il s'agit des primitives des fonctions f et g s'annulant en 0. Pour calculer $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt$, on effetue une IPP en dérivant $f(t)$ pour obtenir $f'(t) = \frac{g(t)}{t}$, et en intégrant la constante

1 en t. On obtient alors immédiatement $F(x) = [tf(t)]_0^x - \int_0^x g(t)\ dt = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.

(b) On écrit tout simplement (relation de Chasles) $G(x) = \int_0^1 g(t)\ dt + \int_1^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}\ dt$. Lorsque $t \geqslant 1$, on peut majorer assez brutalement $e^{-\frac{1}{t}}$ par 1, et on note simplement $C = \int_0^1 g(t)\ dt$ (cette valeur existe certainement puisque g est une fonction continue), donc $G(x) \leqslant C + \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = C + \ln(x)$. Le fait que $G(x) \geqslant 0$ est trivial puisqu'on intègre une fonction qui est toujours positive.

(c) La question précédente prouve que $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. De plus, $xe^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc en reprenant l'expression de la question a, $F(x) = x + o(x) + \ln(x) + o(\ln(x)) \sim x$.

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'on va normaliser pour la mettre sous la forme $y' + \frac{1}{x^2}y = 1$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ étant continue sur l'intervalle de résolution $]0, +\infty[$ et y admettant en particulier $x \mapsto -\frac{1}{x}$ comme primitive, les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Reste à déterminer une solution particulière de (E), en ayant recours à la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p(x) = K(x)e^{\frac{1}{x}}$, et on calcule $y_p'(x) = K'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}K(x)e^{\frac{1}{x}}$. La fonction y_p est solution de l'équation (E) si $K'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}K(x)e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}K(x)e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc si $K'(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. On peut par exemple choisir $K(x) = F(x)$, et donc $y_p(x) = F(x)e^{\frac{1}{x}}$. Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions $y : x \mapsto (F(x) + K)e^{\frac{1}{x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

C. Étude qualitative d'une équation différentielle.

1. En remplaçant x par 0 dans l'équation, on obtient $0 \times y'(0) + y(0) = 0$, donc $u_0 = y(0) = 0$.
2. Dérivons (on peut, une solution de (E) sera toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce qui est d'ailleurs sous-entendu par l'énoncé) : $2xy' + x^2y'' + y' = 2x$, donc en remplaçant à nouveau x par 0, $u_1 = y'(0) = 0$. Dérivons alors une deuxième fois : $2y' + 2xy'' + 2xy'' + x^2y''' + y'' = 2$, on obtient enfin quelque chose d'un peu plus intéressant puisque $2u_1 + u_2 = 2$, donc $u_2 = y''(0) = 2$.
3. Si $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ était solution de (E), il devrait vérifier d'après les questions précédentes $P'(0) = P(0) = 0$, donc $b = c = 0$, et $P''(0) = 2$, donc $2a = 2$, soit $a = 1$. Autrement dit, on aurait $P(x) = x^2$. Mais si on remplace dans l'équation (E), on trouve alors $x^2 \times 2x + x^2 = x^2$, ce qui n'est pas vraiment exact. Aucun polynôme du second degré ne peut donc convenir.
4. Il suffit de dériver n fois l'équation (E). Puisqu'on suppose $n \geqslant 3$, le membre de droite va simplement disparaitre. À gauche la formule de Leibniz permet de calculer (avec des notations pas totalement rigoureuses pour simplifier la rédaction) $(x^2y')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} y^{(n+1-k)} = x^2y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)}$. Il ne reste plus qu'à ajouter la dérivée n-ème de y pour obtenir l'équation proposée par l'énoncé.

   En remplaçant une dernière fois x par 0, on en déduit que $u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$, donc $u_n = -n(n-1)u_{n-1}$.
5. La relation de récurrence précédente devrait suffire à conjecturer que, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = (-1)^n n!(n-1)!$. Prouvons-le par récurrence : pour $n = 2$, on retrouve bien $u_2 = 2! \times 1! = 2$. Supposons la formule vérifiée au rang n, alors d'après la question précédente, $u_{n+1} = -(n+1)nu_n = -(-1)^n(n+1)n \times n!(n-1)! = (-1)^{n+1}(n+1)!n!$, ce qui prouve l'hérédité (en fait, il n'y a plus rien à faire une fois qu'on a deviné la bonne formule).

6. La formule précédente donne $u_3 = y'''(0) = -6 \times 2 = -12$, puis $u_4 = y^{(4)}(0) = 24 \times 6 = 144$. Il ne reste alors plus qu'à appliquer la formule de Taylor-Young pour obtenir le DL demandé (en n'oubliant pas les division par $n!$) : $y(x) = x^2 - 2x^3 + 6x^4 + o(x^4)$.