Devoir Surveillé n° 10 : DS bilan.

MPSI Lycée Camille Jullian

4 juin 2022

Exercice : probabilités (d'après EDHEC 2000).

On effectue une suite de lancers indépendants d'une même pièce truquée donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0, 1[$). Pour tout entier $k \geqslant 2$, on dira que le lancer numéro k est un **changement** s'il donne un résultat différent du lancer numéro $k - 1$. On note de plus X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements obtenus lors des n premiers lancers de la pièce. Pour alléger la rédaction, on pourra noter P_k et F_k les évènements « La pièce est tombée sur Pile au lancer numéro k » et « La pièce est tombée sur Face au lancer numéro k » et on autorisera les abréviations du type P_1F_2 pour désigner l'évènement $P_1 \cap F_2$.

1. Donner la loi de la variable X_2.
2. Donner la loi de X_3 et vérifier que $\mathbb{E}(X_3) = 4pq$ et $\mathbb{V}(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. Calculer la loi et l'espérance de la variable X_4.
4. Dans le cas général, calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{2pq}{q - p}(q^{n-1} - p^{n-1})$ (en supposant $p \neq q$).
6. En distinguant deux cas suivant la parité de n, calculer $\mathbb{P}(X_n = n - 1)$.
7. On note désormais Z_k la variable aléatoire valant 1 si le lancer numéro k est un changement, 0 sinon. Déterminer la loi et l'espérance de la variable Z_k, en déduire une formule générale pour $\mathbb{E}(X_n)$.
8. Dans le cas particulier où $p = q = \dfrac{1}{2}$, vérifier que les variables X_3 et X_4 suivent des lois binomiales (dont on précisera les paramètres). La variable X_n suivra-t-elle toujours une loi binomiale dans ce cas (justifier et, en cas de réponse positive, donner le paramètre de la loi) ?

Problème 1 : algèbre linéaire (d'après Petites Mines 2003).

On se place dans cet exercice dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On notera par ailleurs I la matrice identité dans l'espace E, et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

I. Étude d'une symétrie.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de E, on note $s(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$? Et en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Pour toute la suite de cette partie, on considérera toujours les espaces vectoriels comme des espaces vectoriels complexes.
2. Montrer que s est une symétrie de l'espace E.
3. Déterminer explicitement $\ker(s - id)$ et sa dimension. En déduire la dimension de $\ker(s + id)$.
4. Montrer que la famille (I, J, K, L) est une base de E, et déterminer la matrice de s dans cette base.
5. Quelques propriétés élémentaires de la symétrie s :
   (a) Montrer que, si $(A, B) \in E^2$, $s(AB) = s(B)s(A)$.
   (b) Montrer que $As(A) = \det(A)I$.
   (c) Montrer que, si A est inversible, $s(A)$ l'est aussi, et exprimer $s(A^{-1})$ et $s(A)^{-1}$ en fonction de A.
   (d) Exprimer $s(A)$ en fonction de A, I et de $\text{Tr}(A)$.

II. L'algèbre des quaternions.

Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on associe au couple (z_1, z_2) la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$. On note $H = \{M(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\}$.

1. Montrer que toute matrice de H peut s'écrire comme combinaison linéaire **à coefficients réels** des matrices I, J, K et L. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de E **vu comme espace vectoriel réel** et donner sa dimension.
2. Montrer que H est stable par produit matriciel.
3. Montrer que, $\forall A \in H$, $s(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}^+$.
4. Montrer que toute matrice non nulle appartenant à H est inversible, et que son inverse appartient aussi à H.
5. Quelles sont les différentes structures algébriques (groupe, anneau, corps, espace vectoriel) que les différents calculs effectués permettent de définir sur l'ensemble H ou sur l'ensemble $H\backslash\{0\}$? Préciser pour chacune des structures de groupe s'il s'agit d'un groupe commutatif ou non.
6. Montrer que, si n et p sont deux entiers naturels pouvant s'écrire comme la somme de quatre carrés, alors np peut aussi s'écrire comme somme de quatre carrés (on partira de l'expression de $\det(M(z_1, z_2))$ comme somme de quatre carrés).

Problème 2 : analyse (d'après Petites Mines 2007).

Pour tout l'exercice, on définit sur $]0,+\infty[$ deux fonctions f et g par $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$.

A. Généralités.

1. Montrer que, $\forall t > 0$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement (qu'on continuera à noter g) est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g, et donner une allure de son graphe (on donne $\dfrac{1}{e} \simeq 0.36$).
4. En notant H la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1, calculer H, puis donner son développement limité à l'ordre 3 en 1.
5. Soit $n \geqslant 3$, on note (E_n) l'équation $f(t) = \dfrac{t}{n}$.
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera α_n. On montrerait de même que l'équation admet une unique solution β_n sur $]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que les deux suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer que ces deux suites ne peuvent pas avoir une limite finie $l > 0$. En déduire leurs limites.

B. Fonctions définies par des intégrales.

Dans cette deuxième partie, on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

1. Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité démontrée à la question $A.1$ reste valable en 0.
2. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ (intégrales qu'on ne cherchera surtout pas à calculer).
   (a) Que représentent les fonctions F et G pour f et g ? Montrer que $F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.
   (b) En séparant l'intégrale définissant G en deux, montrer que $\forall x \geqslant 1$, $0 \leqslant G(x) \leqslant C + \ln(x)$, où C est une constante réelle.
   (c) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$, en faisant apparaitre la fonction F dans l'expression des solutions.

C. Étude qualitative d'une équation différentielle.

Dans cette dernière partie, y est une solution quelconque de l'équation différentielle (E) définie à la question $B.3$, mais sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On notera, pour tout entier naturel n, $u_n = y^{(n)}(0)$.

1. Que vaut u_0 ?
2. En dérivant l'équation (E), calculer u_1 et u_2.
3. Un polynôme du second degré peut-il être solution de (E) sur $[0,+\infty[$?
4. À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que, si $n \geqslant 3$,
   $$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$
   .
   En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
5. Donner une expression de u_n à l'aide de factorielles, valable pour $n \geqslant 2$.
6. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction y en 0.