

# Devoir Surveillé n° 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 mai 2022

## Exercice 1 : algèbre linéaire.

1. Un calcul immédiat montre que tous les coefficients de  $J^2$  sont égaux à  $n$ , et donc que  $J^2 = nJ$ . Comme  $J^2$  est la matrice représentative dans la base canonique de  $f^2$ , on a donc également  $f^2 = nf$ .
2. En notant  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u$  appartient à  $\ker(f)$  s'il vérifie l'unique équation  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ . L'ensemble des solutions de cette équation est un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ , dont une base est par exemple  $((1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1))$  (base qui est bien constituée de  $n - 1$  vecteurs, ce qui est cohérent avec la dimension de l'hyperplan). De même,  $u \in \ker(f - n \text{id})$  s'il vérifie les  $n$  équations suivantes :  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_1, x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_n$ . Puisque le membre de gauche de chaque équation est le même, cela implique  $nx_1 = nx_2 = \dots = nx_n$ , et donc  $u \in \text{Vect}((1, 1, \dots, 1))$ . Réciproquement, le vecteur  $(1, 1, \dots, 1)$  vérifie bien  $f(u) = nu$ , donc  $\ker(f - n \text{id}) = \text{Vect}((1, 1, \dots, 1))$ , c'est en particulier un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 1. Les deux noyaux calculés ont une somme de dimensions égale à  $n$ . De plus, leur intersection est nulle puisqu'un vecteur  $u$  ne peut pas vérifier à la fois  $f(u) = 0$  et  $f(u) = nu$  sans être nul. Ils sont donc bien supplémentaires dans  $\mathbb{R}^n$ .
3. Il suffit de considérer la famille  $\mathcal{B} = ((1, 1, \dots, 1), (1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, -1), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1))$  obtenue en groupant les bases obtenues pour nos deux noyaux. Comme les deux noyaux sont supplémentaires,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , et la matrice de  $f$  dans cette base est par construc-

tion  $D = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  (le premier vecteur de la base vérifie  $f(u) = nu$ , les autres

appartiennent tous au noyau de  $f$ ).

4. On se contente d'écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$  :  $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Dans ce cas particulier,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . On peut par exemple calculer l'inverse en

résolvant le système  $\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ x - y - z = c \end{cases}$ . La somme des trois équations donne im-

médiatement  $3x = a + b + c$  donc  $x = \frac{a + b + c}{3}$ , et on déduit tout aussi immédiatement en

reprenant les deux premières équations du système que  $y = a - x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c$  et  $z = b - x = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c$ . La matrice  $P$  est donc bien inversible, d'inverse  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 2 : fractions rationnelles.

- Il faut résoudre l'équation  $X^4 + X^2 + 1 = 0$ . En posant  $x = X^2$ , on se ramène à l'équation du second degré  $x^2 + x + 1 = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 1 - 4 = -3$  et admet donc deux racines complexes  $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$  et  $x_2 = \bar{x}_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = j^2$ . Pas besoin de calcul compliqué pour déterminer les racines carrées de ces deux valeurs, qui seront donc les quatre pôles de notre fraction :  $X_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ ,  $X_2 = -e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = j^2$ ,  $X_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j$  et  $X_4 = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ . Les pôles  $X_1$  et  $X_3$  sont conjugués, ainsi que les pôles  $X_2$  et  $X_4$ .
- Il n'y aura pas de partie entière à calculer, la décomposition sera de la forme  $F = \frac{a}{X - j} + \frac{\bar{a}}{X - j^2} + \frac{b}{X + j} + \frac{\bar{b}}{X + j^2}$ . On peut calculer les valeurs de  $a$  et  $b$  en dérivant le dénominateur de notre fraction :  $a = \frac{X}{4X^3 + 2X}(j) = \frac{j}{4 + 2j} = \frac{1}{2(2j^2 + 1)} = \frac{1 + 2j}{2(2j^2 + 1)(1 + 2j)} = \frac{1 + 2j}{2(2j^2 + 2j + 5)} = \frac{1 + 2j}{6}$  (on rappelle que  $1 + j + j^2 = 0$ ). De même,  $b = \frac{-j}{-4 - 2j} = \frac{1}{2(1 + 2j^2)} = \frac{1 + 2j}{2(5 + 2j + 2j^2)} = \frac{1 + 2j}{6}$ . Finalement, on peut écrire  $F = \frac{1 + 2j}{6(X - j)} + \frac{1 + 2j^2}{6(X - j^2)} + \frac{1 + 2j}{6(X + j)} + \frac{1 + 2j^2}{6(X + j^2)}$ . On regroupe les termes conjugués pour obtenir la décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  :  $F = \frac{(1 + 2j)(X - j^2) + (1 + 2j^2)(X - j)}{6(X - j)(X - j^2)} + \frac{(1 + 2j)(X + j^2) + (1 + 2j^2)(X + j)}{6(X + j)(X + j^2)} = \frac{(2 + 2j + 2j^2)X - j^2 - 2 - j - 2}{6(X^2 + X + 1)} + \frac{(2 + 2j + 2j^2)X + j^2 + 2 + j + 2}{6(X^2 - X + 1)} = -\frac{1}{2(X^2 + X + 1)} + \frac{1}{2(X^2 - X + 1)}$ .
- En repartant de l'expression obtenue à la question précédente,  $2I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))^2 + 1} - \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2}))^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(\sqrt{3}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 3 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ . Finalement,  $I = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ .
- On souhaite donc calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ . On pose tout simplement  $k = k + 1$  dans la deuxième somme, ce qui donne  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ . La somme se telescope effectivement, il ne reste que le terme d'indice 0 de la somme de gauche et celui d'indice  $n + 1$  de la somme de droite, soit  $S_n = 1 - \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}$ .

### Exercice 3 : algèbre linéaire.

1. La linéarité est évidente, elle découle de celle des opérations de dérivation et de multiplication par  $X$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ . De plus, si  $P$  est un polynôme de degré majoré par 3,  $d^\circ(P') \leq 2$  et  $d^\circ(P'') \leq 1$ , ce qui permet de prouver immédiatement que  $d^\circ(f(P)) \leq 3$  et donc que  $f$  est bien un endomorphisme.
2. On calcule pour cela les images des polynômes de la base canonique :  $f(1) = -3$ , puis  $f(X) = (X - 4) \times 1 - 3X = -2X - 4$ ,  $f(X^2) = X \times 2 + (X - 4) \times 2X - 3X^2 = -X^2 - 6X$  et enfin  $f(X^3) = X \times (6X) + (X - 3)(3X^2) - 3X^3 = -6X^2$ . Il ne reste plus qu'à écrire la

matrice correspondante : 
$$M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice  $M$  est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale comporte un 0, elle ne peut pas être inversible (plus simplement, on peut aussi dire qu'elle contient une ligne entière de zéros). L'application  $f$  ne peut donc pas être bijective.
4. En notant  $P = a + bX + cX^2 + dX^3$  un polynôme appartenant à  $\mathbb{R}_3[X]$ ,  $f(P) = 0$  si  $-3a - 4b = -2b - 6c = -c - 6d = 0$  (on utilise le fait que  $f(X) = MX$ , en notant  $X$  la matrice-colonne des coefficients du polynôme  $P$ , écrits dans l'ordre des puissances croissantes). Autrement dit, on doit avoir  $c = -6d$ ,  $b = -3c = 18d$ , puis  $a = -\frac{4}{3}b = -24d$ , donc  $P = dX^3 - 6dX^2 + 18dX - 24$ . On conclut :  $\ker(f) = \text{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$ . En particulier,  $\dim(\ker(f)) = 1$  et le théorème du rang assure alors que  $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - 1 = 3$ .
5. Le calcul de la matrice  $M$  effectué plus haut prouve que  $d^\circ(f(P)) \leq 2$  (la dernière ligne étant nulle, la matrice-colonne de l'image aura toujours un dernier coefficient nul), donc  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ . Or, on a vu à la question précédente que  $\dim(\text{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ . On a donc nécessairement  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$ . Pour prouver la supplémentarité de l'image et du noyau, il suffit de montrer que leur intersection ne contient que le polynôme nul, ce qui est ici évident (l'unique polynôme obtenu pour constituer une base du noyau étant de degré 3, il ne peut pas appartenir à l'image de  $f$ ).
6. Par linéarité,  $f(X - 4) = f(X) - 4f(1) = -2X - 4 + 12 = -2X + 8 = -2(X - 4)$ . Le polynôme  $X - 4$  est donc un vecteur propre de  $f$ , associé à la valeur propre  $-2$ .
7. On cherche donc les polynômes  $P = a + bX + cX^2 + dX^3$  vérifiant  $f(P) = -P$ . On peut déjà affirmer que  $d = 0$  puisque  $f(P)$  est un polynôme de degré majoré par 2. On se contente ensuite de reprendre l'expression donnée par la matrice  $M$  pour obtenir les équations  $-3a - 4b = -a$ ,  $-2b - 6c = -b$  et  $-c = -c$  (une fois imposé  $d = 0$ ). La dernière équation est manifestement inutile, et les deux restantes imposent  $b = -6c$  puis  $2a = -4b = 24c$  donc  $a = 12c$ . Finalement, on en déduit facilement que  $\ker(f + id) = \text{Vect}(X^2 - 6X + 12)$ . On peut donc poser  $Q = X^2 - 6X + 12$  et  $R = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$  (cf calcul du noyau).

8. La famille  $\mathcal{B}$  est échelonnée et constituée de quatre polynômes de  $\mathbb{R}_3[X]$ , c'est donc une base de cet espace vectoriel. De plus, elle est uniquement constituée de vecteurs propres pour l'application  $f$  :  $f(1) = -3$ ,  $f(X - 4) = -2(X - 4)$ ,  $f(Q) = -Q$  et  $f(R) = 0$ , donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

9. Il suffit d'écrire la matrice de passage de la base canonique vers  $\mathcal{B}$ , en faisant évidemment attention à bien écrire les coefficients dans le bon ordre : 
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 Notons

en passant que, la matrice étant triangulaire supérieure, son inverse se calculerait en fait très rapidement.

10. (a) Les quatre matrices  $D$ ,  $D+I_4$ ,  $D+2I_4$  et  $D+3I_4$  sont diagonales, avec un 0 à une position différente de la diagonale (dernier coefficient pour  $D$ , troisième coefficient pour  $D+I_4$  etc. Le produit des quatre va donc joyeusement s'annuler :  $P_f(D) = 0$ .
- (b) On sait que  $D = P^{-1}MP$  donc  $PDP^{-1} = M$ . Il suffit alors de développer simplement le produit :  $P(D + \lambda I_4)P^{-1} = PDP^{-1} + \lambda P I_4 P^{-1} = M + \lambda I_4$ .
- (c) La question précédente prouve que  $P_f(M) = PDP^{-1}P(D+I_4)P^{-1}P(D+2I_4)P^{-1}P(D+3I_4)P^{-1} = PP_f(D)P^{-1} = 0$ .
- (d) Il suffit de faire la division euclidienne du polynôme  $X^n$  par  $P_f : X^n = Q_n P_f + a_n X^3 + b_n X^2 + c_n X + d_n$ , avec  $Q_n$  le quotient de cette division, et un reste de degré au maximum 3 puisqu'on divise par un polynôme de degré 4. Mais comme  $X^n$  et  $P_f$  ont tous les deux un coefficient constant nul (ils s'annulent en 0), on en déduit immédiatement que  $d_n = 0$ , d'où la formule de l'énoncé. Cette décomposition est bien sûr unique par unicité de la division euclidienne.
- (e) Le fait que l'application soit linéaire est évident ( $(\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M)$  quels que soient les polynômes  $P$  et  $Q$ ). De plus, la question précédente montre que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n = Q_n(M)P_f(M) + a_n M^3 + b_n M^2 + c_n M$ . Comme  $P_f(M) = 0$ , on a en fait  $M^n = a_n M^3 + b_n M^2 + c_n M$ , donc  $M^n \in \text{Vect}(M, M^2, M^3)$ . Attention tout de même à ne pas oublier le cas particulier  $M^0 = I_3$ . Finalement, toutes les puissances de  $M$  appartiennent à l'espace vectoriel  $\text{Vect}(I_3, M, M^2, M^3)$ , et leurs combinaisons linéaires aussi, ce qui prouve exactement que  $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(I_3, M, M^2, M^3)$  (on n'a techniquement seulement prouvé une inclusion, mais l'image contient manifestement les quatre matrices  $I_3$ ,  $M$ ,  $M^2$  et  $M^3$  qui sont simplement les images par  $\varphi$  des polynômes  $1$ ,  $X$ ,  $X^2$  et  $X^3$ ). Il ne reste plus qu'à prouver que ces quatre matrices engendrent un espace vectoriel de dimension 4, donc forment une famille libre de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . Pour cela, supposons  $aI_4 + bM + cM^2 + dM^3 = 0$ . Par produit à gauche par  $P^{-1}$  et à droite par  $P$ , on en déduit la condition équivalente  $aI_4 + bD + cD^2 + dD^3 = 0$ . Les matrices étant diagonales, cette dernière égalité se traduit

$$\text{simplement par les quatre équations du système } \begin{cases} a - 3b + 9c - 27d = 0 \\ a - 2b + 4c - 8d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \\ a = 0 \end{cases}.$$

Bien, déjà  $a = 0$ , l'avant-dernière équation devient alors  $d = c - b$ . On reporte dans les deux autres équations :  $24b - 18c = 6b - 4c = 0$ , ce qui n'est possible que si  $b = c = 0$  (les équations ne sont pas proportionnelles). On en déduit  $d = 0$ , la famille est donc bien libre, et l'application  $\varphi$  de rang 4 comme annoncé. Comme l'application  $f \mapsto \text{Mat}_{\text{can}}(f)$  est par ailleurs un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{\geq}[\mathcal{X}])$  et  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , on en déduit immédiatement que la famille  $(f^n)$  engendre un espace vectoriel de dimension 4 égal à  $\text{Vect}(id, f, f^2, f^3)$  (pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4, avec les mêmes notations que précédemment, on aura  $f^n = a_n f^3 + b_n f^2 + c_n f$ ).

## Exercice 4 (extrait du Concours d'entrée aux Petites Mines de 1998).

### A. Généralités.

1. Il ne contient pas la matrice nulle (qui peut difficilement vérifier  $A^p = I_n$ ), donc ce n'est certainement pas un sous-espace vectoriel (on peut aussi constater que l'ensemble n'est pas du tout stable par produit extérieur :  $I_n \in \mathcal{R}_n(p)$ , mais  $2I_n$  n'appartient jamais à l'ensemble ; la stabilité par somme n'est pas non plus vérifiée, même s'il est plus difficile de donner un contre-exemple).

2. Supposons donc que  $A^p = I_n$ , alors  $A \times A^{p-1} = I_n$ , ce qui suffit à prouver que  $A$  est inversible, et que  $A^{-1} = A^{p-1}$ . De plus,  $(A^{-1})^p = A^{p(p-1)} = I_n^{p-1} = I_n$ , donc  $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$ .
3. La récurrence classique montre que,  $\forall k \geq 1$ ,  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$  (c'est évidemment vrai pour  $k = 1$ , et on peut ensuite calculer, avec l'hypothèse que la formule est vraie au rang  $k$ ,  $(P^{-1}AP)^{k+1} = P^{-1}AP(P^{-1}AP)^k = P^{-1}APP^{-1}A^kP = P^{-1}A^{k+1}P$ ). On en déduit alors immédiatement que, si  $A^p = I_n$ , alors  $(P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP = P^{-1}I_nP = I_n$ , donc  $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$ .
4. En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de la matrice diagonale  $D$ ,  $D \in \mathcal{R}_n(p)$  si et seulement si  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\lambda_i^p = 1$ . Si  $p$  est impair, la seule racine  $p$ -ème de l'unité réelle est 1, donc on doit avoir  $\lambda_i = 1$  pour tous les indices  $i$ , la seule matrice convenable est donc  $D = I_n$ . Si  $p$  est pair, on peut avoir  $\lambda_i = 1$  ou  $\lambda_i = -1$  (indépendamment pour chaque indice  $i$ ), il existe donc  $2^n$  matrices diagonales dans l'ensemble  $\mathcal{R}_n(p)$ .
5. L'intersection est constituée des matrices  $A$  vérifiant  $A^{15} = A^{12} = I_n$ . On sait que la matrice  $A$  est alors inversible (question 2), donc  $A^{12}$  également, et on peut alors multiplier par  $A^{-12}$  pour obtenir  $A^3 = I_n$ . Réciproquement, si  $A^3 = I_n$ , on aura a fortiori  $A^{12} = (A^3)^4 = I_n$  et  $A^{15} = (A^3)^5 = I_n$ , donc  $\mathcal{R}_n(12) \cap \mathcal{R}_n(15) = \mathcal{R}_n(3)$ . On pourrait montrer de même que, plus généralement,  $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(p \wedge q)$ .

## B. Étude de $\mathcal{R}_2(2)$ .

1. Puisque  $A^2 = I_2$ , l'application  $f$  est une symétrie. Plus précisément, une fois qu'on a éliminé les cas triviaux  $A = I_2$  et  $A = -I_2$ , on peut affirmer que  $f$  est une symétrie par rapport à une droite (et parallèlement à une autre droite) dans le plan.
2. La supplémentarité du noyau, c'est du cours. On sait par ailleurs que ces deux noyaux sont de dimension 1 (sinon, on aurait l'un des deux de dimension 2, et donc  $f = id$  ou  $f = -id$ , ce qui a été exclu par l'hypothèse de la première question), on peut donc construire une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  avec  $e_1 \in \ker(f - id)$  et  $e_2 \in \ker(f + id)$ . La matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2)$  est bien égale à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
3. Notons  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  la matrice de passage de la base canonique vers la base construite à la question précédente. On inverse la matrice  $P$  à l'aide d'un micro-pivot, en effectuant l'opération  $L_2 \leftarrow cL_1 - aL_2$  pour obtenir  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$ . La matrice est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ , on effectue ensuite l'opération  $L_1 \leftarrow (bc - ad)L_1 - bL_2$  pour trouver la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} a(bc - ad) & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$ . Il ne reste plus qu'à diviser la première ligne par  $a$  puis le tout par  $bc - ad$  pour obtenir l'identité. On effectue ensuite les mêmes opérations à partir de la matrice  $I_2$  pour trouver successivement  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -a \end{pmatrix}$ , puis  $\begin{pmatrix} -ad & ab \\ c & -a \end{pmatrix}$ , et enfin  $P^{-1} = \frac{1}{bc - ad} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ . La formule de l'énoncé suggère de changer les signes, ce qu'on va faire pour le dernier calcul. On sait que  $A = PDP^{-1}$ , où  $D$  est la matrice diagonale calculée à la question précédente. On calcule donc  $PD = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ , puis  $A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}$ . C'est exactement la formule demandée dans l'énoncé.
4. L'ensemble contient la matrice  $I_2$  comme élément neutre, et il est stable par passage à l'inverse. Le seul problème provient donc de la stabilité par produit. Il suffit de prendre deux matrices plus ou moins aléatoires de la forme précédente pour construire un contre-exemple, par exemple  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , et  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$  (obtenue en posant  $a = b = c = 1$  et

$d = 2$ ). On calcule facilement  $B = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$  et on vérifie que  $B^2 \neq I_2$ , ce qui fournit le contre-exemple souhaité. Géométriquement, cela signifie que la composée de deux symétries par rapport à des droites n'a aucune raison d'être une symétrie par rapport à une droite.

### C. Étude de $\mathcal{R}_2(3)$ .

1. Si  $u \in F$ , alors  $g(u) = u$ , donc  $g^2(u) + g(u) + u = 3u$ , qui ne peut être nul que si  $u = 0$ , donc l'intersection des deux noyaux est bien nulle.
2. Rappelons que, par hypothèse,  $g^3 = id$  (puisque  $M^3 = I_3$ ). On calcule alors  $g(v_1) = \frac{1}{3}(g(u) + g^2(u) + u) = v_1$ , ce qui prouve que  $v_1 \in F$ . De même,  $g^2(v_2) + g(v_2) + v_2 = \frac{2}{3}(2g^2(u) - u - g(u)) + \frac{2}{3}(2g(u) - g^2(u) - u) + \frac{2}{3}(2u - g(u) - g^2(u)) = 0$  (tout s'annule!), ce qui prouve que  $v_2 \in G$ . Or,  $v_1 + v_2 = u$ , ce qui prouve qu'on peut décomposer tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ . Les deux noyaux ont donc une intersection nulle (question 1), et une somme égale à  $\mathbb{R}^2$ , les noyaux sont supplémentaires.
3. Dans ce cas, tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  vérifient  $g(u) = u$ , donc  $g = id$  et  $M = I_2$ .
4. Puisque les espaces sont supplémentaires,  $\dim(F) = 1 \Rightarrow \dim(G) = 1$ , et la construction de la base  $(e_1, e_2)$  en découle. Le vecteur  $g^2(e_2) + g(e_2) + e_2$  est par définition nul (puisque  $e_2 \in G$ ). Or, on devrait avoir  $g(e_2) = ae_1 + be_2$ , avec par hypothèse  $g(e_1) = e_1$ , donc  $g^2(e_2) = ae_1 + bg(e_2) = ae_1 + abe_1 + b^2e_2$ . La condition  $g^2(e_2) + g(e_2) + e_2 = 0$  devient donc  $(a + ab)e_1 + b^2e_2 + ae_1 + be_2 + e_2 = 0$ . La famille  $(e_1, e_2)$  étant libre (c'est une base!), on doit donc avoir  $2a + ab = b^2 + b + 1 = 0$ . Mais la deuxième condition n'est jamais vérifiée avec  $b$  réel. On a donc une contradiction qui rend l'hypothèse  $\dim(F) = 1$  absurde.
5. Si la famille  $((1,0), g(1,0))$  n'était pas une base, cela signifierait que  $g(1,0) = a(1,0)$ . Mais alors  $g^3(1,0) = a^3(1,0)$ . Comme  $g^3 = id$ , cela ne peut se produire que si  $a = 1$ , donc si  $g(1,0) = (1,0)$ . Mais alors  $(1,0) \in \ker(f - id)$ , alors qu'on a supposé que cet espace était de dimension 0. C'est absurde, donc notre famille est bien une base de  $\mathbb{R}^2$ .
6. La matrice de  $g$  dans la base donnée à la question précédente est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ , avec donc  $g^2(1,0) = \alpha(1,0) + \beta g(1,0)$ . Mais on sait que  $\dim(F) = 0 \Rightarrow \dim(G) = 2$ , donc  $g^2(1,0) + g(1,0) + (1,0) = 0$ , soit  $\alpha(1,0) + \beta g(1,0) + g(1,0) + (1,0) = 0$ . Les deux vecteurs étant linéairement indépendants (question précédente), on doit avoir  $\alpha = \beta = -1$ , donc  $Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , en notant  $\mathcal{B} = ((1,0), g(1,0))$ . La matrice de passage de la base canonique vers  $\mathcal{B}$  est de la forme  $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$  (le premier vecteur des deux bases est le même!). La matrice inverse est très facile à calculer :  $P^{-1} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Il ne reste plus qu'à calculer  $P Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & -1 - a \\ b & -b \end{pmatrix}$ , puis le produit par  $P^{-1}$  donne bien  $M = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{pmatrix}$ .