Devoir Surveillé n° 9

MPSI Lycée Camille Jullian

14 mai 2022

Exercice 1 : algèbre linéaire.

On note dans tout cet exercice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est égale à J.

1. Calculer J^2, en déduire que $f^2 - nf = 0$.
2. Calculer $\ker(f)$ et $\ker(f - n\,id)$, et montrer que ces deux noyaux sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que f est diagonalisable, et donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP$ soit une matrice diagonale.
5. Calculer P^{-1} dans le cas où $n = 3$.

Exercice 2 : fractions rationnelles.

On considère la fraction $F = \dfrac{X}{X^4 + X^2 + 1}$.

1. Déterminer les pôles de F.
2. Calculer la décomposition en éléments simples de F.
3. Calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$.
4. Calculer la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$ (on aura intérêt à reprendre la forme canonique des dénominateurs utilisée pour le calcul précédent, histoire de se rendre compte qu'il s'agit d'une somme télescopique).

Exercice 3 : algèbre linéaire.

On considère dans cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP'' + (X-4)P' - 3P \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. L'endomorphisme f est-il bijectif (on devra traiter cette question uniquement en exploitant la matrice M obtenue à la question précédente) ?
4. Calculer le noyau de f. En déduire le rang de l'application f.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$, et que $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}_3[X]$.
6. Calculer $f(X-4)$. Que peut-on dire du polynôme $X - 4$ par rapport à l'application f ?
7. Calculer $\ker(f + id)$. On notera Q un polynôme formant une base de ce noyau, et R un polynôme engendrant le noyau de f.
8. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-4, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner la matrice D de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
9. Donner une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP = D$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).
10. On note désormais P_f le polynôme $P_f = X(X+1)(X+2)(X+3)$.

(a) Calculer $P_f(D)$ (où D est toujours la matrice obtenue en question 8).

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de M la valeur de $P(D+\lambda I_4)P^{-1}$.

(c) En déduire la valeur de $P_f(M)$.

(d) Pour tout entier naturel n non nul, montrer qu'il existe un unique polynôme Q_n et trois réels (a_n, b_n, c_n) tels que $X^n = Q_n P_f + a_n X^3 + b_n X^2 + c_n X$.

(e) Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & P(M) \end{array} \right.$ est un morphisme de rang 4. En déduire que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension 4 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

Exercice 4 (extrait du Concours d'entrée aux Petites Mines de 1998).

On s'intéresse dans ce problème aux sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitués de matrices ayant une puissance égale à la matrice identité. Plus précisément, on notera $\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n\}$. On notera par ailleurs classiquement $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A. Généralités.

1. L'ensemble $\mathcal{R}_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.
3. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales appartenant à $\mathcal{R}_n(p)$. Combien y en a-t-il ?
5. Que vaut $\mathcal{R}_n(12) \cap \mathcal{R}_n(15)$? On justifiera la réponse donnée.

B. Étude de $\mathcal{R}_2(2)$.

1. Soit $A \in \mathcal{R}_2(2)$, avec $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, et f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A. Que peut-on dire de f ?
2. En déduire que $\ker(f-id)\oplus\ker(f+id) = \mathbb{R}^2$, et qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $ad-bc \neq 0$ et $A = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\mathcal{R}_2(2)$ n'est pas un groupe (pour l'opération de multiplication des matrices). Interpréter géométriquement ce résultat.

C. Étude de $\mathcal{R}_2(3)$.

On note dans cette partie M une matrice appartenant à $\mathcal{R}_2(3)$, et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M. On notera également $F = \ker(g - id)$ et $G = \ker(g^2 + g + id)$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les vecteurs $v_1 = \dfrac{1}{3}(u+g(u)+g^2(u))$ et $v_2 = \dfrac{1}{3}(2u-g(u)-g^2(u))$, montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
3. Que peut-on dire de g et de M si $\dim(F) = 2$?
4. On suppose dans cette question que $\dim(F) = 1$. Montrer alors l'existence d'une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_2)$. En considérant alors le vecteur $g^2(e_2) + g(e_2) + e_2$, aboutir à une contradiction.
5. On suppose enfin que $\dim(F) = 0$. Montrer que $((1,0), g(1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. En déduire l'existence de deux réels a et b tels que $M = \dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}$.