

# Devoir Surveillé n° 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 avril 2022

## Exercice 1 : intégration.

1.  $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$ .

Ensuite,  $I_1 = \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^1 x dx - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$ .

2. On peut par exemple signaler que,  $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, x^{2n+3} \leq x^{2n+1}$ , donc  $\frac{x^{2n+3}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ .  
Il suffit d'intégrer cette inégalité entre 0 et 1 pour obtenir  $I_n \leq I_{n+1}$ . La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.

3. Il suffit d'écrire  $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} + \frac{x^{2n+3}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2+1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n+1} dx = \frac{1}{2n+2}$ .

4. L'inégalité  $I_n \geq 0$  est évidente (on intègre une fonction positive). On a bien sûr aussi  $I_{n+1} \geq 0$ , donc  $I_n \leq I_n + I_{n+1} \leq \frac{1}{2n+2}$ . Sinon, on peut aussi majorer  $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$  par  $x^{2n+1}$  et intégrer entre 0 et 1 pour obtenir l'inégalité de droite. Bien sûr, la suite  $(I_n)$  converge donc vers 0 (théorème des gendarmes).

5. On peut déjà affirmer que  $I_n + I_{n+1} \sim \frac{1}{2n}$ , mais bien sûr, pas de raison a priori de supposer que  $I_n \sim I_{n+1}$  pour en déduire rapidement que  $I_n \sim \frac{1}{4n}$ . En fait, on n'en a pas vraiment besoin : on sait que la suite  $(I_n)$  est décroissante, donc on peut écrire les inégalités  $2I_{n+1} \leq I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$ , soit  $2I_{n+1} \leq \frac{1}{2n+2} \leq 2I_n$ . En décalant l'inégalité de gauche, on peut en déduire que  $2I_n \leq \frac{1}{2n}$  (pour  $n \geq 1$ ), donc  $\frac{1}{2n+2} \leq 2I_n \leq \frac{1}{2n}$ . Les membres de gauche et de droite de l'encadrement étant tous deux équivalents à  $\frac{1}{2n}$ , on peut cette fois en déduire que  $2I_n \sim \frac{1}{2n}$ , donc  $I_n \sim \frac{1}{4n}$  (théorème des gendarmes appliqué aux équivalents ; si ça ne vous plaît pas on multiplie tout par  $n$  et on applique la version classique du théorème des gendarmes).

6. Effectuons donc une récurrence. Pour  $n = 1$ , la propriété  $2I_1 = -(\ln(2) - v_1) = -\ln(2) + 1$  est correcte d'après le calcul de  $I_1$  effectué à la première question. Supposons la formule vérifiée au rang  $n$ , alors en exploitant la question 3,  $2I_{n+1} = \frac{2}{2n+2} - 2I_n = \frac{1}{n+1} - (-1)^n(\ln(2) - v_n) = (-1)^{n+1} \left( \ln(2) - v_n - \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = (-1)^{n+1}(\ln(2) - v_{n+1})$ , ce qui prouve l'hérédité.

7. On sait déjà que  $(I_n)$  tend vers 0, ce qui prouve que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - v_n = 0$ , donc  $\lim v_n = \ln(2)$ . Remarquons que cela revient exactement à prouver que le développement de Taylor de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  tend vers la valeur exacte de  $\ln(2)$  quand  $x = 1$ .

## Exercice 2 : algèbre linéaire.

1. Dans le cas d'une projection, on sait que  $\ker(p)$  est l'espace parallèlement auquel on projette et  $\text{Im}(p)$  celui sur lequel on projette. Ces deux espaces étant supposés supplémentaires dans la définition d'une projection,  $p$  vérifie donc la condition S. Pour une symétrie, c'est évidemment aussi le cas puisque une symétrie est toujours bijective et qu'on a donc  $\text{Im}(s) = E$  et  $\ker(s) = \{0\}$ , qui sont évidemment supplémentaires. Le même argument prouve d'ailleurs que tout automorphisme de  $E$  vérifie la condition S.
2. Ici,  $\ker(f) = \text{Vect}(1)$  (polynômes constants) et  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$  (le théorème du rang assure que l'image est de dimension 2, et le polynôme dérivé d'un polynôme appartenant à  $\mathbb{R}_2[X]$  étant nécessairement de degré inférieur ou égal à 1, on en déduit que l'image est nécessairement égale à  $\mathbb{R}_1[X]$ ). Alternativement, on peut aussi calculer les images des polynômes de la base canonique, ce qui se fait immédiatement ici. Dans tous les cas, on constate que la condition S n'est pas vérifiée puisque  $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Vect}(1)$  n'est pas réduit au vecteur nul.
3. Le calcul de  $f(M)$  donne bien une image appartenant à  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . De plus,  $f(\lambda M + N) = \frac{\lambda M + N + \lambda M^\top + N^\top}{2} = \lambda f(M) + f(N)$  en exploitant la linéarité de la transposition. L'application  $f$  est donc un endomorphisme, mais surtout  $f$  est une projection puisque  $f(f(M)) = \frac{M^\top + (M^\top)^\top}{2} = \frac{M^\top + M}{2} = f(M)$ . On a donc déjà prouvé plus haut que  $f$  satisfait à la condition S.
4. (a) La linéarité découle de celle de la dérivation. De plus, si  $d^\circ(P) \leq 3$ , on aura  $d^\circ(P'') \leq 1$ , donc  $\frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' \in E$ , et de même pour le terme  $XP'$ , ce qui prouve facilement que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Calculons donc :  $P' = 3aX^2 + 2bX + c$  puis  $P'' = 6aX + 2b$ , donc  $f(P) = (X^2 - 1)(3aX + b) - 3aX^3 - 2bX^2 - cX + aX^3 + bX^2 + cX + d = aX^3 - 3aX + d - b$ .
  - (c) D'après le calcul précédent  $P$  appartient au noyau si  $a = 0$  et  $d = b$  (avec  $c$  quelconque), donc  $\ker(f) = \{bX^2 + cX + b \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^2 + 1, X)$ .
  - (d) On applique le théorème du rang :  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - 2 = 2$ . Il suffit donc de trouver deux polynômes de la base canonique ayant deux images non colinéaires pour connaître l'image, par exemple  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(X^3), f(1)) = \text{Vect}(X^3 - 3X, 1)$ .
  - (e) Soit  $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , donc  $Q' = 3aX^2 + 2bX + c$ , alors  $Q \in G$  si et seulement si  $3a + 2b + c = 3a - 2b + c = 0$ , donc si  $b = 0$  (en soustrayant les deux équations) et  $c = -3a$ . On peut donc écrire  $G = \{aX^3 - 3cX + d \mid (a, c) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^3 - 3X, 1)$ . Ceci prouve que  $G$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ , qu'il est de dimension 2 et que  $(X^3 - 3X, 1)$  en forme une base (ces deux polynômes n'étant pas proportionnels, ils forment une famille libre). Enfin,  $G = \text{Im}(f)$  est évident puisqu'on a obtenu la même base pour les deux espaces.
  - (f) Si on regroupe les deux bases obtenues pour le noyau et l'image de  $f$ , on obtient la famille  $(X^3 - 3X, 1, X^2 + 1, X)$  qui est une famille échelonnée de quatre polynômes de  $E$ , et donc une base de  $E$ . Cela suffit à prouver que  $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ .
  - (g) En posant  $A = a$ ,  $B = 0$ ,  $C = -3a$  et  $D = d - b$ , on calcule  $f(f(P)) = AX^3 - 3AX + D - B = aX^3 - 3aX + d - b = f(P)$ , ce qui prouve que  $f \circ f = f$  et donc que  $f$  est un projecteur.
5. (a) Le vecteur  $u = (x, y, z, t)$  appartient au noyau si  $y = 0$  et  $z = x$ , donc  $\ker(f) = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ . En particulier,  $\ker(f)$  est de dimension 2, donc  $\text{Im}(f)$  aussi (théorème du rang). Il suffit donc de calculer deux images non colinéaires pour obtenir une base de l'image :  $f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 3, 0)$  et  $f(0, 1, 0, 0) = (0, -3, 0, 1)$ , donc  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, -3, 0, 1))$  (on a divisé par 3 la première image par souci de simplicité).

- (b) Regroupons les deux bases obtenues pour créer la famille  $(e_1, e_2, e_3, e_4) = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ . Supposons que la combinaison linéaire  $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$  s'annule, cela se traduit par les équations  $a = 0, -3d = 0, a + c = 0$  et  $b + d = 0$ , dont on devrait arriver à déduire assez rapidement que  $a = b = c = d = 0$ . La famille est donc libre, et comme elle est constituée de quatre vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ , c'en est une base, ce qui prouve que  $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ .
- (c) On sait déjà que  $f$  n'est pas un automorphisme depuis le calcul du noyau. De plus,  $f^2(x, y, z, t) = (0, 9y, -9x + 9z, -3y) = -3f(x, y, z, t)$ , ce qui n'est pas vraiment caractéristique d'un projecteur (techniquement,  $f$  est la composée d'une projection et d'une homothétie).

### Exercice 3 : probabilités.

- Puisque les lancers sont supposés indépendants, la probabilité recherchée vaut bien entendu  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .
- Question aussi ridicule que la précédente, la proba vaut  $\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$ .
- Il faut tenir compte de l'emplacement des différents résultats :  $\binom{4}{2} = 6$  positions possibles pour les deux lancers auxquels on a obtenu Pile, puis pour chacune des six possibilités une probabilité  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$  d'obtenir les deux Piles et deux Faces, soit donc une probabilité d'obtenir exactement deux Piles et deux Faces égale à  $\frac{24}{81} = \frac{8}{27}$ .
- Notons  $A$  l'évènement : « on a obtenu un Pile et deux Faces lors des trois premiers lancers ». Un calcul similaire à celui de la question précédente donne  $\mathbb{P}(A) = \binom{3}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ . Notons maintenant  $P_2$  l'évènement : « on a obtenu un Pile au deuxième lancer ». L'évènement  $P_2 \cap A$  ne se produit que si les trois premiers lancers ont donné dans cet ordre les résultats Face, Pile, Face, donc  $\mathbb{P}(P_2 \cap A) = \frac{2}{27}$ , puis  $\mathcal{P}_A(P_2) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}$ . C'est tout à fait logique : il existe trois suites de lancers équiprobables pouvant réaliser l'évènement  $A$  (Pile-Face-Face, Face-Pile-Face et Face-Face-Pile), chacune des trois a donc une probabilité  $\frac{1}{3}$  de s'être produite si on suppose l'évènement  $A$  réalisé.
- Notons donc  $B$  l'évènement « on a obtenu au moins un Pile lors des trois premiers lancers ». L'évènement  $\bar{B}$  n'est réalisé que si on a obtenu trois Faces, donc  $\mathbb{P}(\bar{B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ , et  $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ . L'évènement  $P_2 \cap B$  est vérifié si  $P_2$  est vérifié (puisque la réalisation de  $P_2$  entraîne qu'on a obtenu au moins un Pile lors des trois lancers), donc  $\mathbb{P}(P_2 \cap B) = \mathbb{P}(P_2) = \frac{2}{3}$ . On en déduit que  $\mathbb{P}_B(P_2) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{26}{27}} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$ . Cette probabilité est très légèrement supérieure à  $\frac{2}{3}$ , ce qui est normal (la seule information dont on dispose est qu'on peut éliminer le rare cas où on a obtenu trois Faces, ce qui augmente un peu la probabilité d'avoir obtenu un Pile à chaque lancer).
- Pour cette dernière question, on notera si besoin  $F_n$  l'évènement « on a tiré Face au lancer  $n$  » et  $P_n$  l'évènement « on a tiré Pile au lancer  $n$  ». Les suites du type  $FPFF$  utilisées dans l'énoncé sont bien sûr des raccourcis pratiques pour désigner des évènements du type  $F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4$ .

- (a) L'évènement  $A_2$  est réalisé si et seulement si on a tiré  $PP$  lors des deux premiers tirages, donc  $a_2 = \frac{4}{9}$ . L'évènement  $A_3$  est réalisé si on a tiré  $FPP$  lors des trois premiers tirages (Face obligatoire au premier tirage pour ne pas avoir deux Piles consécutifs dès le deuxième tirage), donc  $a_3 = \frac{4}{27}$ . Enfin, l'évènement  $A_4$  est réalisé dans deux cas :  $PFPP$  et  $FFPP$  (comme précédemment, le Face au deuxième lancer est obligatoire pour éviter d'avoir trop tôt un double Pile), donc  $a_4 = a_3 = \frac{4}{27}$  (le résultat du premier lancer « ne compte pas »).
- (b) Procédons comme le préconise l'énoncé : pour avoir un premier double Pile aux lancers  $n+1$  et  $n+2$  (réalisation de l'évènement  $A_{n+2}$ ) avec  $n \geq 2$ , on a deux possibilités :
- soit le tout premier lancer a donné Face. Dans ce cas, on peut « oublier » le premier lancer, la réalisation de  $A_{n+2}$  est équivalente au fait d'obtenir un premier double Pile aux lancers  $n$  et  $n+1$  dans la suite de lancers obtenue en supprimant le premier (qui ne peut de toute façon pas contribuer à créer un double Pile). Autrement dit,  $\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}$ .
  - soit le premier lancer a donné Pile. Dans ce cas il faut que le deuxième lancer donne Face (pour ne pas avoir un double Pile trop tôt), et on peut ensuite oublier les résultats de ces deux premiers lancers (comme dans le premier cas) pour considérer qu'on doit avoir le premier double Pile aux lancers  $n-1$  et  $n$  dans la suite de lancers ultérieurs. Autrement dit, on aura  $\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) = a_n$ .

Pour être tout à fait rigoureux, on applique ensuite la formule des probabilités totales au système complet d'évènement constitué des trois évènements  $F_1$ ,  $P_1 \cap F_2$  et  $F_1 \cap F_2$  (qui forment un système complet de façon évidente). Comme  $\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) = 0$  (on a déjà obtenu le premier double Pile bien trop tôt), on en déduit que  $\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) \times \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$ .

- (c) La suite  $(a_n)$  est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée  $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$  a pour discriminant  $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$ , et admet comme racines  $x_1 = \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{2}{3}$  et  $x_2 = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{1}{3}$ . On en déduit l'existence de deux constantes  $A$  et  $B$  telles que,  $\forall n \geq 2$ ,  $a_n = A \left(\frac{2}{3}\right)^n + B \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ . Utilisons les conditions initiales pour déterminer  $A$  et  $B$  :  $a_2 = \frac{4}{9} = \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}B$ , donc  $4A + B = 4$ , et  $a_3 = \frac{4}{27} = \frac{8}{27}A - \frac{1}{27}B$ , donc  $8A - B = 4$ . En additionnant les deux équations, on obtient  $12A = 8$ , donc  $A = \frac{2}{3}$ , puis  $B = 4 - 4A = \frac{4}{3}$ .  
Finalement,  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .

- (d) Il s'agit d'un calcul de sommes géométriques :  $\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \frac{4}{3} \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{8}{27} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} + \frac{4}{27} \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{8}{27} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{4}{27} \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{8}{27} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{4}{27} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{8}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{9} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ . Cette somme a bien une

limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , égale à  $\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$ . Cela revient à dire qu'on finira « toujours » par obtenir un double Pile si on fait une suite infinie de lancers, ou plutôt que la probabilité de ne jamais obtenir de double Pile devient nulle.