Devoir Surveillé n° 8

MPSI Lycée Camille Jullian

9 avril 2022

Exercice 1 : intégration.

On note pour tout l'exercice $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx$ (avec bien sûr $n \in \mathbb{N}$).

1. Calculer la valeur de I_0 puis de I_1 (pour cette dernière, on pourra écrire si besoin la division euclidienne de x^3 par $1+x^2$).
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n).
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$. En déduire la convergence et la limite de la suite (I_n).
5. Déterminer **rigoureusement** un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
6. Montrer par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $2I_n = (-1)^n(\ln(2) - v_n)$, où on a posé $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
7. En déduire la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : algèbre linéaire.

On s'intéresse au problème suivant : si E est un espace vectoriel de dimension finie, quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ (on appellera dans la suite de l'exercice « condition S » le fait que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$) ? Le but de l'exercice est essentiellement d'étudier des cas particuliers de ce problème.

1. Si p est une projection de l'espace vectoriel E, que représentent $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$? En déduire si p vérifie ou non la condition S. Une symétrie d'un espace vectoriel E vérifie-t-elle toujours la condition S ?
2. On note $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $f(P) = P'$. Cet endomorphisme vérifie-t-il la condition S ?
3. On note désormais $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = \frac{M + M^\top}{2}$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer s'il vérifie la condition S.
4. On note cette fois-ci $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \to E$ l'application définie par $f(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P$.
   (a) Expliquer pourquoi f est bien un endomorphisme de E (sans faire de gros calculs).
   (b) Déterminer explicitement l'image par f du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
   (c) Déterminer le noyau de l'application f.
   (d) Préciser la dimension de l'image de f, puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.
   (e) On note $G = \{Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension et une base, puis montrer que $G = \mathrm{Im}(f)$.
   (f) Montrer (sans utiliser la question suivante...) que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
   (g) Montrer que f est en fait un projecteur.
5. On note enfin $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x,y,z,t) = (0, -3y, 3x-3z, y)$.
   (a) Déterminer le noyau et l'image de f (on donnera la dimension et une base à chaque fois).
   (b) Vérifier que f satisfait à la condition S.
   (c) Montrer toutefois que f n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

Exercice 3 : probabilités.

On effectue une succession de lancers d'une même pièce non équilibrée, qui tombe à chaque lancer sur Pile avec probabilité $\frac{2}{3}$ et sur Face avec probabilité $\frac{1}{3}$. Les résultats des différents lancers sont bien entendu indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne deux Piles aux deux premiers lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un Face puis deux Piles lors des trois premiers lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux Piles et deux Faces lors des quatre premiers lancers ?
4. On suppose que les trois premiers lancers ont donné un Pile et deux Faces (pas forcément dans cet ordre). Quelle est la probabilité que le Pile ait été obtenu au deuxième lancer ? Interpréter le résultat obtenu.
5. On suppose maintenant qu'on a obtenu au moins un Pile lors des trois premiers lancers, quelle est la probabilité que le deuxième lancer ait donné un Pile ?
6. On note désormais A_n l'événement : « On obtient **pour la première fois** deux Piles successifs aux lancers numéro $n-1$ et n ». Ainsi, l'évènement A_6 sera réalisé si on a tiré $FPFFPP$ lors des six premiers lancers mais pas si on a tiré $FPPFPP$ puisque dans ce cas le premier double Pile est obtenu au lancer numéro 3. On note a_n la probabilité de l'événement A_n.
   (a) Préciser les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ (on pourra distinguer deux cas, selon qu'on a obtenu un Face ou un Pile au tout premier lancer).
   (c) Calculer a_n en fonction de n.
   (d) Si vraiment il vous reste du temps, calculer $\sum_{k=2}^{n} a_k$, puis la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$, et interpréter le résultat obtenu.