Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7 : corrigé

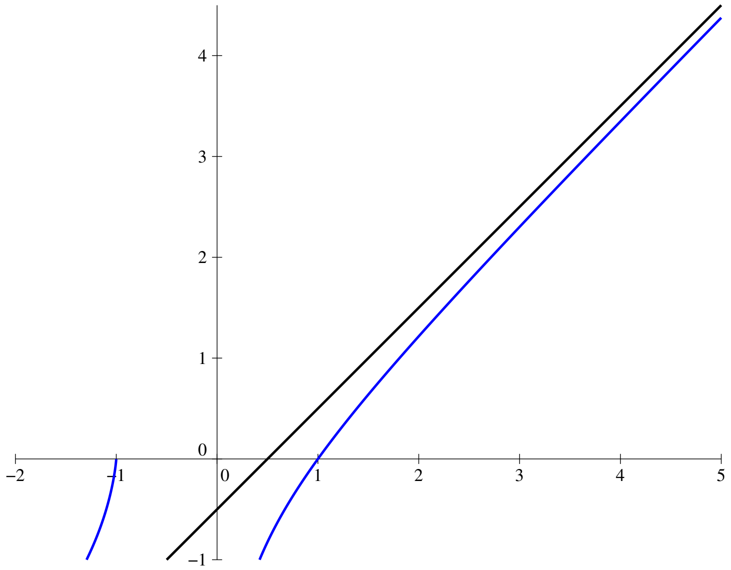
MPSI Lycée Camille Jullian

12 mars 2022

Exercice 1

1. On sait que $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, donc $\mathrm{ch}^2(x) = 1 + x^2 + o(x^3)$ (on garde uniquement le 1^2 et le double produit), puis $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{1 + x^2 + o(x^3)} = 1 - x^2 + o(x^3)$ (pour rédiger tout à fait rigoureusement, on écrit $u = x^2 + o(x^3)$, donc $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$, ce qui suffit à obtenir le DL à l'ordre 3 demandé).
2. On commence par écrire que $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ (on peut simplement remplacer le x par un x^2 dans le DL de $\dfrac{1}{1+u}$, puisque x^2 tend vers 0 quand x tend vers 0), puis on effectue simplement un produit : $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2} = \left(x - \dfrac{1}{3}x^3\right)(1 - x^2 + x^4) + o(x^4) = x - x^3 - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4) = x - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^4)$ (le dernier terme calculé pour $\dfrac{1}{1+x^2}$ ne servait en fait à rien). Comme $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$ est la dérivée de $\dfrac{1}{2}\arctan^2(x)$, on peut intégrer ce DL (la valeur de la fonction en 0 étant nulle, même pas besoin d'ajouter une constante) pour obtenir $\dfrac{1}{2}\arctan^2(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^5)$, donc $\arctan^2(x) = x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^5)$.
3. On pose donc $X = \dfrac{1}{x}$ pour avoir X qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On calcule ensuite $f(x) = \left(\dfrac{1}{X^2} - 1\right)\ln(1+X)$, soit $X^2 f(x) = (1 - X^2)\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right) = X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 - X^3 + o(X^3) = X - \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}X + o(X) \underset{x\to+\infty}{=} x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit :
   - $f(x) \sim x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \sim -\dfrac{2}{3x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
   - de plus, $-\dfrac{2}{3x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, donc la courbe de f est située en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

   Et l'allure de courbe demandée :



4. Le DL est évident : $x+\ln(1+x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. La fonction f est bijective de $]-1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ en tant que fonction continue strictement croissante (c'est la somme de deux fonctions trivialement croissantes), les limites étant triviales à calculer. Sa réciproque f^{-1} vérifiera $f^{-1}(0) = 0$ (puisque $f(0) = 0$) et aura donc en 0 un DL d'ordre 3 de la forme $f^{-1}(x) = ax+bx^2+cx^3+o(x^3)$. Or, on doit avoir $f^{-1}(f(x)) = x$, avec (en composant les deux DL) $f^{-1}(f(x)) = a\left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + b\left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2 + c\left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + o(x^3) = 2ax - \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{3}x^3 + 4bx^2 - 2bx^3 + 8cx^3 + o(x^3)$. Une simple identification donne alors les conditions $2a = 1$, donc $a = \frac{1}{2}$, puis $4b - \frac{a}{2} = 0$, donc $b = \frac{a}{8} = \frac{1}{16}$, et enfin $8c - 2b + \frac{a}{3} = 0$, donc $c = \frac{1}{4}b - \frac{1}{24}a = \frac{1}{64} - \frac{1}{48} = -\frac{1}{192}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{192}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2

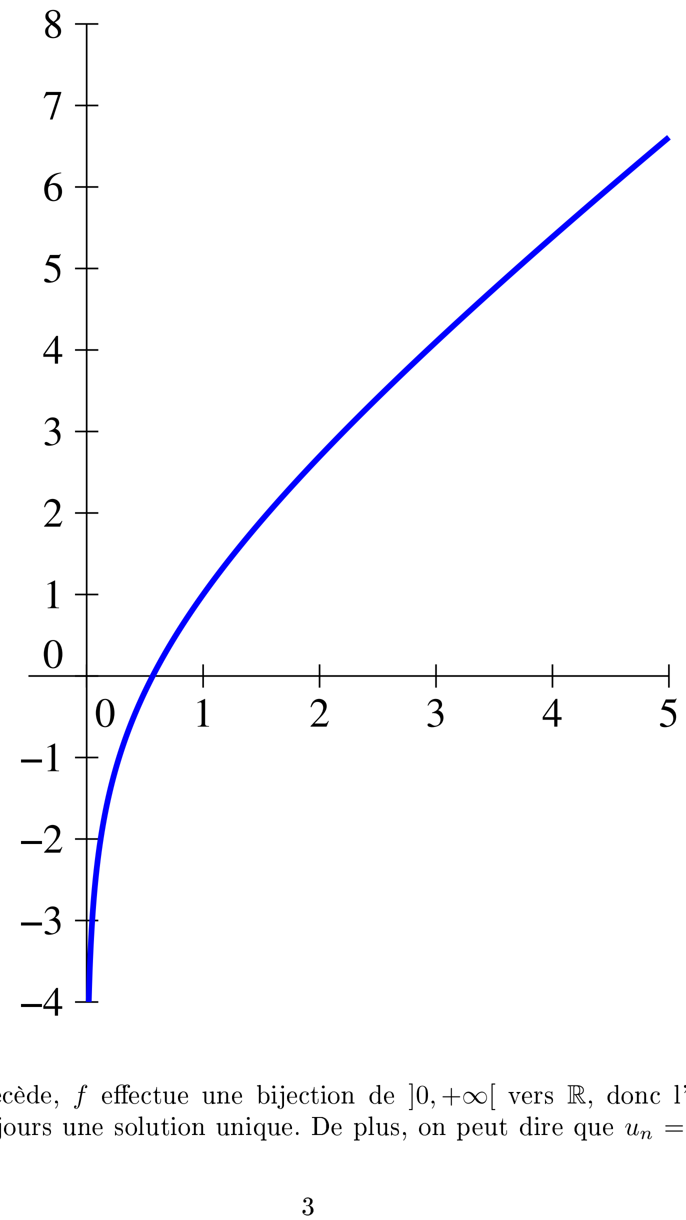
1. Il existe évidemment 10 nombres à un chiffre, dont aucun ne peut contenir 42, donc $t_1 = 10$, et $u_1 = 1$ (seul 4 convient). Pour les nombres à deux chiffres, on en a 100 (puisqu'on accepte ceux commençant par un 0, techniquement on inclut donc les nombres à un chiffre dans ceux à deux chiffres), dont un seul contient 42 (c'est bien sûr 42 lui-même), donc $t_2 = 99$. Il y a 10 nombres à deux chiffres finissant par un 4, et aucun d'entre eux ne peut contenir 42, donc $u_2 = 10$.
2. Considérons donc un nombre à $n+1$ chiffres ne contenant par 42. Deux possibilités : soit son avant-dernier chiffre était un 4, et le nombre conssitué de ses n premiers chiffres peut alors être choisi de u_n façons différentes, qu'on peut compléter avec n'importe quoi sauf un 2 (pour ne pas faire apparaitre un 42), ce qui fait $9u_n$ possibilités. Soit l'avant-dernier chiffre n'est pas un 4 (donc $t_n - u_n$ possibilités pour les n premiers chiffres), on peut compléter comme on veut, ce qui donne $10(t_n - u_n)$ possibilités. Au total (les deux cas sont incompatibles), on se retrouve donc avec $t_{n+1} = 10(t_n - u_n) + 9u_n = 10t_n - u_n$.
   De plus, on a tout simplement $u_{n+1} = t_n$ (on n'a pas le choix pour le dernier chiffre, et on ne risque pas de faire apparaitre 42 en complétant avec un 4).
3. Il suffit de l'écrire : $t_{n+2} = 10t_{n+1} - u_{n+1} = 10t_{n+1} - t_n$.
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 10x + 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 100 - 4 = 96$, et pour racines $x_1 = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$ et $x_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. On en déduit l'existence de deux constantes A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = A(5-2\sqrt{6})^n + B(5+2\sqrt{6})^n$. Pour simplifier le calcul de A et B, on va effectivement autoriser la valeur $n = 0$, en posant $t_0 = u_1 = 1$ (pour que la relation de récurrence double reste vraie pour $n = 0$). On en déduit alors

les deux équations $A+B = t_0 = 1$ et $x_1A+x_2B = t_1 = 10$, donc $B = 1-A$, puis $x_1A+x_2-x_2A = 10$, soit $A = \dfrac{10-x_2}{x_1-x_2} = \dfrac{5-2\sqrt{6}}{-4\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4\sqrt{6}}$, puis $B = 1-A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4\sqrt{6}}$.

5. Comme $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ est légèrement inférieur à 5, x_1 est compris entre 0 et 1, alors que x_2 est largement plus grand que 1, donc $x_2^n = o(x_2^n)$ et $t_n \sim Bx_2^n \sim \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4\sqrt{6}}\right)(5+2\sqrt{6})^n$.
6. Il existe 10^n nombres à n chiffres, la probabilité complémentaire de celle recherchée est donc équivalente à $\dfrac{Bx_2^n}{10^n}$. Comme $x_2 < 10$ (pas de beaucoup certes), ce quotient a une limite nulle, donc $\lim p_n = 1$.

Exercice 3

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, strictement croissante comme somme de fonctions croissantes, et vérifie $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Pour les plus curieux, signalons qu'il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$, mais que la direction de la courbe se rapproche quand même de plus en plus de celle de la droite d'équation $y = x$ (on parle de branche infinie de direction donnée par la droite dans ce cas). De plus, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x}$, puis $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, ce qui prouve la concavité de la fonction. On peut ajouter que $f(1) = 1$ pour avoir un point de repère supplémentaire sur la courbe :



2. D'après ce qui précède, f effectue une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = n$ admet en effet toujours une solution unique. De plus, on peut dire que $u_n = f^{-1}(n)$, où f^{-1} est

la réciproque de f, qui est strictement croissante et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ (théorème de la bijection), ce qui suffit à affirmer que (u_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On calcule simplement $f(n) = n + \ln(n) \geqslant n$ lorsque $n \geqslant 1$ (l'encadrement proposé par l'énoncé ne peut pas avoir de sens si $n = 0$), et $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ en exploitant le fait que $\ln(x) \leqslant x - 1 < x$ pour tout réel strictement positif (inégalité de convexité vue en cours). On a donc $f\left(\frac{n}{2}\right) < f(u_n) < f(n)$, ce qui donne l'encadrement souhaité puisque f est une fonction croissante. On en déduit, via le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, mais à vrai dire, on le savait déjà...
4. Par définition, $f(u_n) = n$ donc $u_n + \ln(u_n) = n$. Or, $\lim u_n = +\infty$, donc $\ln(u_n) = o(u_n)$, ce qui prouve que $u_n + \ln(u_n) \sim u_n$, et donc que $n \sim u_n$.
5. On sait que $u_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = n+1$, donc $u_{n+1} - u_n + \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1$, ou encore $u_{n+1} - u_n = 1 - \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Mais d'après la question précédente, $u_n \sim n$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{n+1}{n} \sim 1$, ce qui prouve que $\lim \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 0$, et donc que $\lim u_{n+1} - u_n = 1$.
6. (a) C'est un calcul direct : $v_n - 1 = \frac{n - u_n - \ln(n)}{\ln(n)}$. Or, $u_n + \ln(u_n) = n$, donc $n - u_n = \ln(u_n)$ et $v_n - 1 = \frac{\ln(u_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(\frac{u_n}{n})}{\ln(n)}$. On sait que $\lim \frac{u_n}{n} = 1$, donc $\lim \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$, et $\lim(v_n - 1) = 0$ (même pas de forme indéterminée ici), ce qui revient évidemment à dire que $\lim v_n = 1$.
   (b) On peut donc écrire $v_n = 1 + o(1)$, soit $n - u_n = \ln(n) + o(\ln(n))$, ou encore $u_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$. Mais alors $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \sim -\frac{\ln(n)}{n}$ (on a bien une quantité qui tend vers 0 par croissance comparée, on peut appliquer cet équivalent classique), ce qui prouve que $v_n - 1 \sim -\frac{1}{n}$, et donc que $n - u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, soit le développement à trois termes demandé par l'énoncé : $u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
   (c) On repart bien sûr de $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = -\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$ (il faut être un peu attentif ici car tous les termes ne sont pas du même ordre de grandeur, mais n'importe quel terme du type $\frac{\ln^k(x)}{n^3}$ sera négligeable par rapport à du $\frac{\ln^p(x)}{n^2}$, quelles que soient les valeurs des entiers n et p). On en déduit $n - u_n = \ln(n)v_n = \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n) = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$, donc $u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2n^2} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. On a même obtenu un terme de plus que ce qui était demandé !

Problème

0. Petit préliminaire calculatoire.

1. On remplace simplent : $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}$, puis $\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}$, et enfin $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16}$. Ces calculs devraient normalement vous rappeler vaguement quelque chose.
2. Puisqu'on nous donne gentiment la formule, prouvons-là par récurrence. Pour $k = 1$, la formule donne une valeur de $\frac{2(-1)^0 \times 0!}{4 \times 1! \times 0!} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ce qui correspond bien à la valeur de $\binom{\frac{1}{2}}{1}$. Supposons désormais la formule vérifiée au rang k, alors $\binom{\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k)}{(k+1)!} = \binom{\frac{1}{2}}{k} \times \frac{\frac{1}{2}-k}{k+1} =$

$\binom{\frac{1}{2}}{k} \times \dfrac{1-2k}{2(k+1)}$. En exploitant l'hypothèse de récurrence, on a donc $\binom{\frac{1}{2}}{k+1} = \dfrac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!} \times \dfrac{1-2k}{2(k+1)} = \dfrac{2(-1)^k(2k-1)!}{2 \times 4^k(k+1)!(k-1)!}$. On peut multiplier en haut et en bas par $2k$ pour obtenir $\dfrac{2(-1)^k(2k)!}{4^{k+1}(k+1)!k!}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $k+1$. On a donc bien prouvé la formule pour tout entier $k \geqslant 1$ par récurrence.

1. Une étude de fonction.

1. La fonction est définie si $x \neq 0$ et $1-4x \geqslant 0$, donc $x \leqslant \frac{1}{4}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

2. On sait que $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$ quand u tend vers 0, donc $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x + o(x)$ et $f(x) = \dfrac{1-(1-2x)+o(x)}{2x} \sim \dfrac{2x}{2x} = 1$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, et donc qu'on peut prolonger f par continuité en 0.

3. On a tout simplement exactement $\sqrt{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k + o(x^n)$.

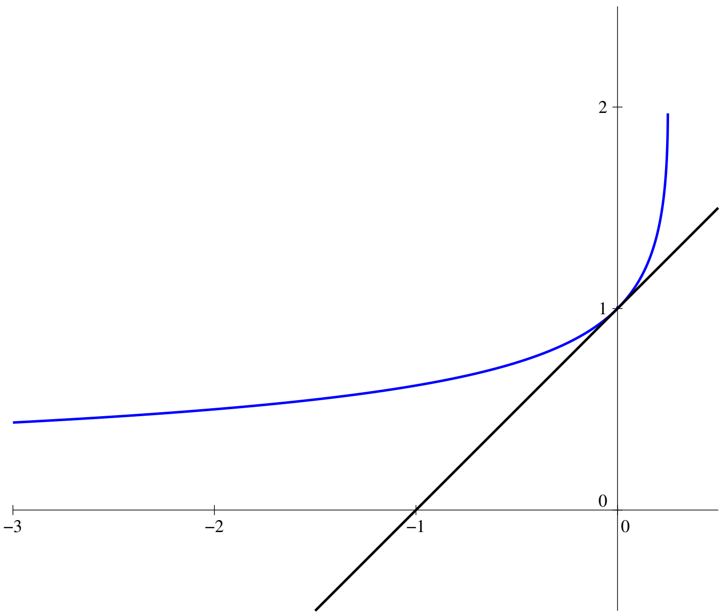
4. On peut remplacer sans problème : $\sqrt{1-4x} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} 4^k x^k + o(x^{n+1})$. Le terme constant de ce développement étant égal à 1, on a donc $1 - \sqrt{1-4x} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} 4^k x^k + o(x^{n+1})$, puis $f(x) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} 4^k x^{k-1} + o(x^n) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k+1} 4^{k+1} x^k + o(x^n)$. Rappelons que $\binom{\frac{1}{2}}{4} = \binom{\frac{1}{2}}{3} \times \dfrac{-5}{8} = -\dfrac{5}{128}$, puis $\binom{\frac{1}{2}}{5} = \binom{\frac{1}{2}}{4} \times \dfrac{-7}{10} = \dfrac{7}{256}$ (on peut aussi reprendre la formule générale démontrée en question 0.2). On calcule alors $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + o(x^4)$ (par exemple pour le dernier terme, le coefficient vaut $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{256} \times 4^5 = \dfrac{7 \times 1\,024}{512} = 14$).

5. Puisque la fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0, f est dérivable en 0, et l'équation de sa tangente est donnée par le début du DL : $y = 1 + x$. Comme par ailleurs $f(x) - (1+x) \sim 2x^2 \geqslant 0$, la courbe est localement située au-dessus de sa tangente.

6. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{4}{2\sqrt{1-4x}} \times 2x - 2(1-\sqrt{1-4x})}{4x^2} = \dfrac{4x - 2\sqrt{1-4x} + 2(1-4x)}{4x^2\sqrt{1-4x}} = \dfrac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2\sqrt{1-4x}}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, il faut donc étudier le signe du numérateur : $f'(x) \geqslant 0$ si $1 - 2x \geqslant \sqrt{1-4x}$. Comme $x \leqslant \frac{1}{4}$, le membre de gauche de l'inégalité est positif, et notre condition est donc équivalente à $(1-2x)^2 \geqslant 1-4x$, soit $1-4x+4x^2 \geqslant 1-4x$, ce qui est toujours vérifié. Autrement dit, $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction f est donc croissante sur tout son domaine de définition (donc sur $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ après prolongement par continuité). De plus, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{-4x}}{2x} \sim -\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Par ailleurs, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2$, ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

7. Voici l'allure et la tangente demandées :



2. Dénombrement des expressions bien parenthésées.

1. On ne peut avoir de parenthèses équilibrées si la longueur est impaire puisqu'il n'y aura pas autant de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes.
2. On a donc $c0 = 1$ (le seul mot convenable étant le mot vide), $c_1 = 1$: () est la seule possibilité bien parenthésée, $c_2 = 2$: on peut écrire ()() ou (()) pour avoir une expression bien parenthésée, et $c_3 = 5$ comme annoncé dans l'énoncé, les possibilités étant ()()(), ()(()), (())(), (()()) et ((())).
3. Il faut simplement choisir l'emplacement des trois parenthèses ouvrantes (les parenthèses fermantes prendront automatiquement les emplacements restants), ce qui peut se faire de $\binom{6}{3} = 20$ façons différentes (seul un quart des choix possibles est donc bien parenthésé).
4. Comme souvent, il est délicat de faire une démonstration extrêmement rigoureuse de ce genre de relation de récurrence. Le but est plutôt d'expliquer l'idée derrière la formule. Ici, pour faire apparaitre la formule, on doit distinguer n possibilités, ce qui va se faire en focntion de l'endroit où va être fermée la première parenthèse ouvrante. Notons que celle-ci est nécessairement fermée à une position paire (en numérotant les positions possibles de 1 à $2n$) puisque ce qui se trouve à l'intérieur de ces deux parenthèses (la première ouvrante et celle qui la ferme) doit nécessairement être une expression bien parenthésée (les parenthèses ouvertes doivent l'être à l'intérieur) donc de longueur paire. En fait :

   - si on ferme notre parenthèse immédiatement, on a une suite de symboles du type $()s$, avec s une suite bien parenthésée de longueur $2n-2$. Réciproquement, toute suite de cette forme convient, et il y en a par définition c_{n-1}, ou encore $c_0 \times c_{n-1}$ puisque $c_0 = 1$.
   - si on ferme notre parenthèse en position 4, on a une suite de la forme $(())s$, avec s une suite bien parenthésée de longueur $2n-4$. Là encore, la réciproque est évidente et on a $c_{n-2} = c_1 \times c_{n-2}$ telles suites (on n'a pas le choix pour ce qui se trouve entre nos deux parenthèses, et $c_1 = 1$).
   - si on ferme notre parenthèse en position 6, on a une suite de la forme $(s_1)s_2$, avec s_1 de longueur 4 et s_2 de longueur $2n-6$. On a enfin le choix pour ce qui se trouve à gauche, $c_2 = 2$ choix possibles en l'occurrence, et donc au total c_2c_{n-3} possibilités.
   - si on ferme notre parenthèse en position 8, on a une suite de la forme $(s_1)s_2$, avec s_1 de longueur 6 et s_2 de longueur $2n-8$. De même que ci-dessus, on obtient c_3c_{n-4} possibilités.
   - plus généralement, en fermant notre parenthèse en position $2k$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on aura toujours à choisir une chaîne de longueur $2k-2$ et une autre de longueur $2n-2k$, soit $c_{k-1}c_{n-k}$ possibilités.
   - quitte à faire un léger changement d'indices, la somme de toutes ces possibilités donne bien $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.

5. C'est un simple calcul : $f(x)^2 = \dfrac{1+1-4x-2\sqrt{1-4x}}{4x^2} = \dfrac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2} = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$, ce qui donne bien $f(x) = 1 + xf(x)^2$.

6. Supposons que le DL d'ordre n de la fonction f s'écrire sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors $1 + xf(x)^2 = 1 + x\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\right)^2$. On va développer le carré de façon inhabituelle en n'écrivant pas de double produit mais en faisant vraiment le produit terme à terme : $1 + xf(x)^2 = 1+x\left(\displaystyle\sum_{i+j\leqslant n} a_i a_j x^{i+j} + o(x^n)\right) = 1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{k-i-1} x^k + o(x^n)$ (on a posé $k = i+j+1$ par rapport à la forme précédente, donc $j = k-1-i$ à valeur de k fixée). Comme cette expression doit être égale à $f(x)$, on peut effectuer une identification des coefficients pour obtenir $a_0 = 1$ puis, $\forall k \geqslant 1$, $a_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{k-1-i}$. Il s'agit exactement de la valeur initiale et de la relation de récurrence vérifiées par la suite (c_n), donc $a_n = c_n$ (ok, on peut pipoter une récurrence pour faire plus rigoureux, mais on n'aura strictement aucun calcul supplémentaire à faire).

7. On sait d'après les calculs de la partie 1 que $a_n = \dfrac{1}{2}(-1)^n\dbinom{\frac{1}{2}}{n+1}4^{n+1} = \dfrac{(-1)^n 4^{n+1}}{2} \times \dfrac{2(-1)^n(2n)!}{4^{n+1}(n+1)!n!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Autrement dit, $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)\times(n!)^2} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.