Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7

MPSI Lycée Camille Jullian

12 mars 2022

Exercice 1

Les questions de ce premier exercice sont indépendantes, tous les calculs doivent être effectués rapidement et sans erreur !

1. Calculer un DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.
2. Calculer un DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$. En déduire un DL à l'odre 5 en 0 de $\arctan^2(x)$ (en expliquant correctement le raisonnement effectué).
3. Effectuer l'étude locale en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto (x^2-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (on illustrera par une allure locale de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$).
4. Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$. Expliquer rapidement pourquoi f est bijective, et calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de sa réciproque f^{-1}.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on note t_n le nombre de nombres entiers constitués de n chiffres et ne contenant pas la séquence 42. Pour simplifier, on considère que nos nombres de n chiffres ont le droit de commencer par un ou plusieurs 0. Ainsi, pour $n = 3$, le nombre 057 est un nombre ne contenant pas 42. Le nombre 242 est un nombre contenant 42, par contre le nombre 462 ne contient pas 42 (le 4 et le 2 doivent être consécutifs). On notera également pour la suite u_n le nombre de nombres à n chiffres ne contenant pas 42 et se terminant par le chiffre 4 (par exemple 464 en est un).

1. Déterminer la valeur de t_1, t_2, u_1 et u_2.
2. En utilisant un raisonnement de dénombrement (à expliquer de façon claire), exprimer t_{n+1} en fonction de t_n et de u_n. Exprimer de même u_{n+1} en fonction de t_n.
3. En déduire une relation de récurrence du type $t_{n+2} = at_{n+1} + bt_n$.
4. Calculer explicitement t_n en fonction de n.
5. Donner un équivalent simple de t_n quand n tend vers $+\infty$.
6. En notant p_n la probabilité qu'un nombre de n chiffres choisi au hasard contienne 42, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$?

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on notre u_n l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$.

1. Effectuer une étude complète de la fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ (variations, limites, convexité), et tracer une allure de sa courbe représentative.
2. En déduire l'existence et l'unicité de u_n. Quelle est la monotonie de la suite (u_n) (réponse à justifier) ?
3. Montrer que $\dfrac{n}{2} \leqslant u_n \leqslant n$. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
4. Montrer rigoureusement que $u_n \sim n$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n$.
6. On pose désormais $v_n = \dfrac{n-u_n}{\ln(n)}$.
   (a) Vérifier que $v_n - 1 = \dfrac{\ln(\frac{u_n}{n})}{\ln(n)}$. En déduire la limite de la suite (v_n).
   (b) Écrire un developpement asymptotique à trois termes de la suite (u_n).
   (c) Reprendre les calculs précédents pour trouver un quatrième terme dans ce développement asymptotique.

Problème

Le but de ce problème est de calculer les valeurs des nombres de Catalan (nombres intervenant dans beaucoup de problèmes classiques de dénombrement) en exploitant des calculs de développement limités (oui, c'est bien un problème qui mélange dénombrement et DL).

0. Petit préliminaire calculatoire.

Pour tout **réel** x et tout entier naturel k, on définit $\displaystyle\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$, avec la convention $\displaystyle\binom{x}{0} = 1$.

1. Donner la valeur de $\binom{\frac{1}{2}}{k}$, pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\displaystyle\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$.

1. Une étude de fonction.

On s'intéresse dans cette partie à la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0.
3. Donner la formule générale du DL d'ordre n en 0 de $\sqrt{1+x}$ en exploitant les nombres $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ introduits ci-dessus.
4. En déduire une formule pour le DL d'ordre $n+1$ en 0 de $\sqrt{1-4x}$, puis calculer le DL d'ordre n en 0 de $f(x)$. On donnera en particulier explicitement un DL d'ordre 4 en 0 de $f(x)$.
5. Déduire des calculs précédents l'existence d'une tangente en 0 à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, donner son équation, ainsi que sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$.
6. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
7. Donner une allure de $\mathcal{C}_f$, en faisant figurer la tangente calculée en question 5.

2. Dénombrement des expressions bien parenthésées.

On s'intéresse dans cette partie à des suites de symboles constituées uniquement de parenthèses ouvrantes (et de parenthèses fermantes), qui sont **bien parenthésées**, c'est-à-dire qui vérifient les deux conditions suivantes :

- il y a autant de (que de).
- chaque parenthèse ouvrante est refermée par une parenthèse fermante située après la parenthèse ouvrante. Autrement dit, lorsqu'on lit la suite de caractères de gauche à droite, on a en permanence croisé au moins autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.

Ainsi, la chaine de caractères (()()) est bien parenthésée mais ()))(() ne l'est pas (la deuxième parenthèse fermante apparait alors qu'il n'y a eu qu'une seule parenthèse ouvrante auparavant). Pour tout entier naturel n, on notera c_n le nombre de suites de parenthèses de longueur $2n$ qui sont bien parenthésées.

1. Pourquoi n'avoir considéré que des suites dont la longueur est paire pour la définition des nombres c_n ?
2. Donner la valeur de c_0 (le mot vide est considéré comme bien parenthésé), c_1, c_2 et c_3 en faisant la liste des suites de parenthèses convenables (on devrait trouver $c_3 = 5$).
3. Combien existe-t-il au total de suites de parenthèses de longueur 6 contenant trois parenthèses ouvrantes et trois parenthèses fermantes (sans nécessairement respecter la condition « bien parenthésée ») ?
4. Démontrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.
5. Montrer que la fonction f étudiée ci-dessus vérifie l'équation $f(x) = 1 + xf(x)^2$.
6. En déduire que les coefficients de son DL d'ordre n en 0 sont les nombres c_n (on exploitera la relation de la question précédente et l'unicité du DL en 0 d'une fonction).
7. En déduire une expression explicite de c_n en fonction de n.