Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 6

MPSI Lycée Camille Jullian

5 février 2022

Exercice 1 : Calcul matriciel.

1. Calculons donc : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ 2 & 15 & -12 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Si on impose l'égalité souhaitée pour les coefficients de la deuxième ligne (celle où on a le plus souvent des 0 qui apparaissent, ça simplifiera la résolution), on obtient le système d'équations $\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2b & & & = & 2 \\ 7a & + & 3b & + & c & = & 15 \\ -6a & & & & & = & -12 \end{array} \right.$. Le système se résout de lui-même : $b = 1$, $a = 2$, donc $c = 15 - 14 - 3 = -2$. La seule relation possible est donc $A^3 = 2A^2 + A - 2I_3$, on vérifie bien sûr qu'elle reste valable pour tous les autres coefficients, ce qui est bien le cas.

3. On peut écrire $-A^3 + 2A^2 + A = 2I_3$, donc $A \times \left(-\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3\right) = I_3$, ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Si on est courageux, on vérifie que $A^{-1} \times A = I_3$, ce qui est bien le cas.

4. On cherche donc les racines de $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$. On a déjà une première racine évidente qui est $X_1 = 1$ (puisque $Q(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$), et même une deuxième avec $X_2 = -1$ (en effet, $Q(-1) = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$). Le produit des trois racines du polynôme étant égal à -2, la dernière racine est donc $X_3 = 2$.

5. Comme d'habitude, je vais utiliser une résolution de système : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & - & z & = & a \\ -x & + & y & + & 2z & = & b \\ -x & + & y & + & z & = & c \end{array} \right.$. On s'empresse d'additionner les lignes extrêmes pour obtenir $x = a + c$, et de soustraire les deux dernières lignes pour avoir $z = b - c$. Il ne reste alors plus qu'à reprendre par exemple la dernière équation pour en déduire $y = c + x - z = a - b + 3c$. La matrice P est donc inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. On calcule donc $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 01 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est comme prévu une matrice diagonale. On remarque que ses coefficients diagonaux sont exactement les racines du polynôme Q, ce n'est sûrement pas un hasard.

7. On a bien sûr $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 01 & 0 & \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. La propriété demandée se démontre apr une récurrence hyper classique : $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, ce qui prouve la propriété pour $n = 0$. Si on la suppose vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A$, or $P^{-1}A = DP^{-1}$ d'après la définition de D, donc $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} + PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité.

8. (a) Il suffit d'écrire le calcul : $X_{n+1} = A \times X_n$.

   (b) On va démontrer par récurrence que $X_n = A^nX_0$. C'est trivial au rang 0 : $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$, et l'hérédité est triviale aussi : si $X_n = A^nX_0$ alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$.

(c) Bon, finalement, il va falloir calculer A^n pour s'en sortir (ou au moins ses deux premières lignes puisque le produit par X_0 ne fera intervenir que les coefficients des deux premières lignes). $PD^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n & -1 & -2^n \\ (-1)^{n+1} & 1 & 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 1 & 2^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n - 3 + 2(-1)^n \\ 1 + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} - 1 & 3 - 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 1 + (-1)^{n+1} & 2^n - 1 & 3 - 2^n + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$. On mutliplie simplement cette matrice par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pour obtenir X_n, et donc $u_n = 2(-1)^n - 2^n$, $v_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$ et $w_n = 2^n + (-1)^{n+1}$.

Exercice 2 : Polynômes de Legendre.

1. Puisque $P_0 = 1$, $L_0 = P_0^{(0)} = 1$. Ensuite, $P_1 = (X+1)(X-1) = X^2 - 1$ et $L_1 = P_1' = 2X$, puis $P_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$, donc $L_2 = P_2'' = (4X^3 - 4X)' = 12X - 4$, et enfin $P_3 = (X^2-1)^3 = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$, donc $L_3 = P_3''' = (6X^5 - 12X^3 + 6X)'' = (30X^4 - 36X^2 + 6)' = 120X^3 - 72X$.
2. Même pas besoin de récurrence : P_n est par définition un polnyôme unitaire de degré $2n$. Quand on le dérive n fois, on obtiendra donc un polnyôme L_n de degré $2n - n = n$ et de coefficient dominant égal à $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k = \frac{(2n)!}{n!}$.
3. La dérivée d'une fonction paire est impaire. En effet, si f est paire, on peut écrire $\tau_{-x,f}(h) = \dfrac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \dfrac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\tau_{x,f}(-h)$. Cette expression a par définition de la dérivée pour limite $-f'(x)$, ce qui prouve que $f'(-x) = -f'(x)$ et donc que f' est impaire. Une démonstration identique au signe près prouve que la dérivée d'une fonction impaire est paire. Or, le polynôme P_n est toujours pair (sous la forme $P_n = (X^2-1)^n$ c'est évident), le dériver n fois donnera donc un polynôme dont la parité dépend de celle de n : si n est pair, alors L_n est pair, si n est impair, L_n l'est aussi.
4. Les réels 1 et -1 étant racines de multiplicté n du polynôme P_n (puisque P_n se factorise par $(X-1)^n$ et $(X+1)^n$), toutes les valeurs demandées sont nulles.
5. C'est un exercice de la feuille d'exercices de dérivation. Notons donc A_k la propriété : $P_n^{(k)}$ a k racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$ (l'entier n est ici fixé une bonne fois pour toutes, la récurrence porte bien sur k). La propriété est certainement vérifiée au rang 0 (de fait le polynôme P_n n'admet pas de racines dans $]-1,1[$ puisque ses seules racines sont -1 et 1). Supposons la vraie à un rang $k < n$, et mettons les racines dans l'ordre croissant $-1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < 1$. Comme on sait par ailleurs que $P_n^{(k)}(-1)$ et $P_n^{(k)}(1)$ sont également nulles, on peut appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $]-1,a_1[$, $]a_1,a_2[$, …, $]a_{k-1},a_k[$ et $]a_k,1[$ pour en déduire la présence de $k+1$ racines pour le polynôme $P_n^{(k+1)}$, qui sont distinctes et dans $]-1,1[$ par construction. On a donc prouvé que $A_k \Rightarrow A_{k+1}$ tant que $k < n$, ce qui prouve par récrurrence toutes les propriétés A_k jusqu'à A_n. En particulier, A_n stipule que L_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$, ce qui prouve bien que le polynôme est scindé à racines simples puisqu'il est de degré n.
6. Posons donc $f(x) = (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n$. Les dérivées de ces deux fonctions se calculent aisément : $\forall k \leqslant n$, $f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-1)^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$, et de même $g^{(n-k)}(x) = \dfrac{n!}{k!}(x+1)^k$. On en déduit donc, en appliquant la formule de Leibniz, que $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(X) g^{(n-k)}(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!^2}{k!(n-k)!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k = n! \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k}\right)^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$. On ne peut pas faire beaucoup mieux en termes de simplification. Si on évalue cette expression pour $X = 1$, tous les termes de la somme s'annulent sauf le dernier (le seul pour lequel la puissance de $(X+1)$ n'est pas strictement positive), donc $L_n(1) = n! \times 2^n$. De même, pour $X = -1$, tous les termes s'annulent sauf le premier et $L_n(-1) = n! \times (-2)^n = (-1)^n n! 2^n$ (on pouvait aussi exploiter la parité des polynômes L_n pour déduire la valeur en -1 de la valeur en 1).

7. On dérive simplement le produit : $P_{n+1} = (X-1)^{n+1}(X+1)^{n+1}$, donc $P'_{n+1} = (n+1)(X-1)^n(X+1)^{n+1} + (n+1)(X-1)^{n+1}(X+1)^n = (n+1)(X-1)^n(X+1)^n(X-1+X+1) = 2(n+1)XP_n$. Si on dérive cette relation, on obtient $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 2(n+1)XP'_n$. Or, on peut reprendre la relation obtenue par le premier calcul et la décaler pour obtenir $P'_n = 2nXP_{n-1}$, donc $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 4n(n+1)X^2P_{n-1}$. Enfin, on peut revenir à la définition des polynômes P_n pour constater que $(X^2-1)P_{n-1} = P_n$, donc $X^2P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$, ce qui permet d'obtenir la relation $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 4n(n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1} = 2(n+1)(1+2n)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$, soit exactement la relation souhaitée.
8. On va bien sûr appliquer la formule de Leibniz, en posant dans un premier temps $f(x) = 2(n+1)x$ et $g(x) = P_n(x)$, pour obtenir $(P'_{n+1})^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)P_n^{(n-k)}(x)$. Il n'y a que deux termes non nuls, et on obtient $P_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1)XP_n^{(n)} + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}$, soit encore $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}$. Dérivons maintenant la deuxième relation $n-1$ fois (pas besoin de Leibniz cette fois-ci) pour obtenir $(P''_{n+1})^{(n-1)} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)P_{n-1}^{(n-1)}$, soit $L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$. On multiplie par $2n+1$ la première relation et on lui soustrait $2n$ fois la deuxième (pour éliminer les termes en $(P_n)^{(n-1)}$) et on tombe magiquement sur $(n+1)L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)XL_n - 4n^2(n+1)L_{n-1}$, qu'on peut simplifier par $n+1$ pour avoir la relation plus simple $L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}$.
9. On écrit simplement $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^{2n-2k}$ (on a développé sous la forme $(-1+X^2)^n$ pour avoir des puissances plus pratiques). Il ne reste plus qu'à dériver n fois, ce qui va annuler tous les termes pour lesquels $2n-2k < n$, donc $k > \dfrac{n}{2}$. Par ailleurs, on calcule facilement $(X^{2n-2k})^{(n)} = \dfrac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}X^{n-2k} = n!\dbinom{2n-2k}{n}X^{n-2k}$. On peut donc écrire que $L_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{2n-k}{n}\binom{n}{k} X^{n-2k}$.

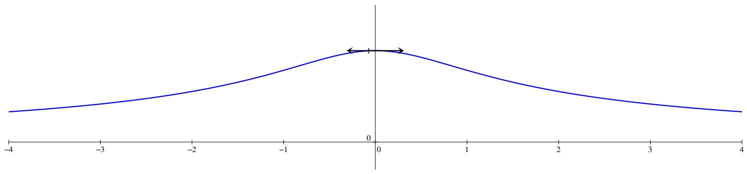
Problème : Analyse (inspiré d'un sujet de Petites Mines).

A. Étude d'une première fonction.

1. Comme $\arctan(0) = 0$, la fonction f est exactement le taux d'accroissement de la fonction arctangente en 0. Sa limite est donc égale à $\arctan'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$. On va donc effectuer le prolongement par continuité en posant $f(0) = 1$.
2. La fonction f est paire comme quotient de fonctions impaires. Si elle est dérivable en 0, on a donc $f'(0) = 0$ (la fonction f' sera alors impaire).
3. Calculons : $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} = \dfrac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}$.
4. Effectuons donc une IPP en posant $u(t) = t$ (et donc $u'(t) = 1$), et $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ où on peut reconnaître une dérivée d'inverse et prendre $v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$. On obtient alors $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan(x) = -\frac{1}{2}x^2f'(x)$.
5. Dans l'égalité obtenue à la question précédente, l'intégrale de gauche est positive si $x > 0$ (intégrale d'une fonction positive entre deux bornes placées en ordre croissant), donc f' est négative et f décroissante sur $]0, +\infty[$. Par parité (ou en faisant la même étude de signe), elle sera croissante sur $]-\infty, 0[$. On peut donc dresser le passionnant tableau de variations suivant (les limites sont évidentes puisque la fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Et la petite courbe qui va avec :



B. Étude d'une deuxième fonction.

1. Sachant que f est paire, en effectuant le changement de variable évident $u = -t$, $g(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^{-x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\int_0^x -f(-u)\,du = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du = g(x)$, donc g est également une fonction paire. Une autre façon de voir les choses : sans le facteur $\frac{1}{x}$, g serait la primitive de f qui s'annule en 0, qui est une fonction impaire. Avec le produit par $\frac{1}{x}$, on retrouve bien une fonction paire.
2. La fonction g n'est rien d'autre que le taux d'accroissement en 0 de la primitive de f s'annulant en 0, donc $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$. On peut à nouveau effectuer un prolongement par continuité en 0.
3. L'encadrement est évident pour $x = 0$. Supposons $x > 0$, alors f est décroissante sur l'intervalle $[0, x]$ donc, $\forall t \in [0, x]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant 1$. On peut intégrer cet encadrement entre 0 et x pour en déduire que $xf(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,dt \leqslant x$, donc en divisant tout par x qui est positif, on trouve bien $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 1$. Si $x < 0$, la parité de toutes les fonctions permet d'obtenir le même encadrement.
4. Notons F la primitive de f s'annulant en 0. Puisque $g(x) = \frac{F(x)}{x}$, on a $g'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} = \frac{f(x) - g(x)}{x}$. Comme on vient de prouver qu'on a toujours $g(x) \geqslant f(x)$, cette dérivée est du signe opposé à celui de x. La fonction g est donc, comme f, croissante sur $]-\infty, 0]$ puis décroissante sur $[0, +\infty[$.
5. On peut très brutalement majorer la fonction arctan par $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir $\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2x}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{\pi\ln(x)}{2x}$. Par croissance comparée cette expression tend vers 0, et comme $\frac{1}{x}\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt \geqslant 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure. D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,dt = 0$ (l'intégrale étant constante, c'est évident), il suffit d'additionner cette limite à la précédente pour en déduire que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

C. Une suite récurrente.

1. La positivité est évidente. De plus, $\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x - 1 - x^2}{2(1+x^2)} = -\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \leqslant 0$, ce qui prouve la majoration souhaitée.
2. L'intégrale censée majorer $|g'(x)|$ se calcule : $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{x - \arctan(x)}{x^2} = \frac{1 - f(x)}{x}$. Or, on a prouvé plus haut que $|g'(x)| = \frac{|f(x) - g(x)|}{x} \leqslant \frac{1 - f(x)}{x}$ à cause de l'encadrement de la question $B.3$. En exploitant désormais la question précédente, on en déduit que $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$. Bien entendu, la fonction g' étant impaire, l'inégalité reste vraie si $x < 0$.
3. Posons donc $h(x) = g(x) - x$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x) - x < 0$ puisque $g'(x) \leqslant \frac{1}{4}$. La fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} g(x) - x = -\infty$ d'après la question $B.5$, et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ par parité, donc $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$. La fonction h effectue donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et en particulier s'annule une seule fois, ce qui prouve que g admet

un unique point fixe α. Enfin, on calcule $h(0) = g(0) = 1$ et $h(1) = g(1) - 1 \leqslant 0$ (puisqu'on sait que $g(x) \leqslant 1$) pour en déduire que $\alpha \in]0, 1]$ (théorème des valeurs intermédiaires).

4. On peut appliquer l'IAF sur l'intervalle $\mathbb{R}$ aux valeurs $x = u_n$ et $y = \alpha$ pour obtenir directement $|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$. On prouve ensuite par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$ (on ne peut pas faire plus précis sans connaître la valeur de u_0). L'initialisation pour $n = 0$ est évidente, et l'hérédité également en exploitant l'inégalité obtenue grâce à l'IAF et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha| = \frac{1}{4^{n+1}}|u_0 - \alpha|$. L'encadrement $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{|u_0 - \alpha|}{4^n}$ permet alors, via le théorème des gendarmes, d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, et donc que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.