Devoir Surveillé n^{o} 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

15 janvier 2022

Exercice 1

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 5$ et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. À l'aide de l'encadrement $2 < \sqrt{5} < 3$, on peut écrire que $-4 < -1-\sqrt{5} < -3$, donc $-2 < x_1 < -\dfrac{3}{2}$, ce qui confirme que $\dfrac{1}{2} < |x_1| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ (on a même de la marge !). De même, $1 < -1+\sqrt{5} < 2$ donc $\dfrac{1}{2} < x_2 < 1$ pour la même conclusion (cette fois-ci on a simplement $|x_2| = x_2$ puisque cette racine est positive).
2. Commençons par constater que 1 est racine évidente de ce polynôme : $1 - 1 + 1 - 1 = 0$. On peut donc factoriser P, et en l'occurrence on peut le faire sans avoir à faire de division euclidienne ou d'identification : $P = X^2(X-1) + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. Les deux autres racines de P sont donc les solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = i$ et $x = -i$. Les racines obtenues sont toutes les trois de module 1.
3. En effet, on reconnait dans l'expression de P un somme géométrique : si $x \neq 1$, $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$. Comme 1 n'est de toute façon pas racine de P, toutes les racines de P vérifient donc $\dfrac{1-x^5}{1-x} = 0$, donc $x^5 = 1$. en fait, les racines de P sont plus précisément les quatre racines cinquièmes de l'unité obtenues en enlevant de l'ensemble $\mathbb{U}_5$ la valeur 1. Bien entendu, toutes ces racines sont de module 1.
4. On a deux chois possibles pour chaque coefficient, à répéter sur $n+1$ coefficients, soit 2^{n+1} possibilités. Par exemple, les quatre polynômes de degré 1 possibles sont $X+1$, $X-1$, $-X+1$ et $-1-X$.
5. Il suffit d'additionner les valeurs obtenues à la question précédente, ce qui mène à un calcul de sommes géométriques : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+2} - 2$.
6. (a) Appliquons tout simplement l'inégalité triangulaire généralisée : $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z|^k$ (puisque par hypothèse $|a_k| = 1$). On reconnait une suite géométrique de raison différente de 1 (puisqu'on a supposé $|z| < 1$), de valeur égale à $\displaystyle|z|\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = |z| \times \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$. Il suffit ensuite d'utiliser la majoration $1 - |z|^{n+1} < 1$ (ici, numérateur et dénominateur du quotient sont positifs) pour obtenir la majoration demandée par l'énoncé.

   (b) Si z est racine de P on aura par définition $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k z^k = -a_0$, donc $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right| = |-a_0| = 1$. La majoration de la question précédente prouve que cela implique $\dfrac{|z|}{1-|z|} \geqslant 1$, donc

$|z| \geqslant 1 - |z|$ (tout est positif avec l'hypothèse $|z| < 1$), soit $|z| \geqslant \dfrac{1}{2}$. Bien entendu cette inégalité est encore vérifiée si $|z| = 1$.

(c) Supposons donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$, avec $z \neq 0$ (de toute façon 0 ne peut pas être racine de P puisque $P(0) = a_0 = \pm 1 \neq 0$), alors on peut tout diviser par z^n pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} = 0$. Quitte à poser $j = n - k$ (ce qui revient à retourner l'ordre d'écriture des termes de la somme), on peut écrire cette égalité sous la forme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \left(\frac{1}{z}\right)^j$. Autrement dit, $\dfrac{1}{z}$ est racine du polynôme dont les coefficients sont a_n (coefficient constant), a_{n-1}, …, a_0 (coefficient de degré n). Or, si $|z| > 1$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, et la question précédente prouve alors que $\left|\dfrac{1}{z}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$ (le polynôme dont $\dfrac{1}{z}$ est racine a les mêmes coefficients que P, même si dans un ordre différent, donc est certainement à coefficients dans $\{-1, 1\}$). On repasse à l'inverse pour en déduire $|z| \leqslant 2$.

(d) Si 2 était racine de P, on aurait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k 2^k = -a_0$. Or, le nombre de gauche est pair (c'est une somme de puissance de 2, au signe près à chaque fois), alors que celui de droite vaut 1 ou -1. C'est manifestement absurde, donc 2 ne peut pas être racine de P. Le raisonnement de la question précédente prouve que $\dfrac{1}{2}$ ne peut pas non plus être racine de P (sinon 2 serait racine du polynôme obtenu en retournant l'ordre des coefficients de P).

Exercice 2

1. Calculons donc : $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p_1 = 2 + 1 = 3$, $q_1 = 2$, puis on applique les relations de récurrence : $p_2 = 2p_1 + p_0 = 7$, $q_2 = 2q_1 + q_0 = 5$, $p_3 = 2p_2 + p_1 = 17$, $q_3 = 2q_2 + q_1 = 12$, $p_4 = 2p_3 + p_2 = 41$ et $q_4 = 2q_3 + q_2 = 29$. On en déduit que $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{7}{5}$, $x_3 = \dfrac{17}{12}$ et $x_4 = \dfrac{41}{29}$. si on est courageux, on peut pousser jusqu'à évaluer $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.4$, $x_3 \simeq 1.4167$ et $x_4 \simeq 1.4138$, ce qui est cohérent avec les propriétés démontrées plus loin sur la suite (x_n). Les plus réveillés se rendront peut-être même compte que la suite (x_n) semble converger vers une valeur qui pourrait bien être $\sqrt{2}$ (cf question 9.c).

2. Récurrence double triviale : c'est vrai pour q_0 et q_1 par hypothèse, et si on suppose $q_n \geqslant n$ et $q_{n+1} \geqslant n + 1$, alors $q_{n+2} \geqslant q_{n+1} + q_n \geqslant 2n + 1$, ce qui est largement plus fort que ce qu'on doit prouver.

3. Essayons de simplifier à l'aide de la relation de récurrence : si $n \geqslant 1$, on peut écrire $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$ et de même pour q_{n+1}, donc $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = a_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - a_{n+1}q_np_n - q_{n-1}p_n = -(p_nq_{n-1} - q_np_{n-1})$. Autrement dit, en posant $u_n = p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison -1. Comme $u_0 = p_1q_0 - q_1p_0 = a_0a_1 + 1 - a_1a_0 = 1$, on aura simplement $u_n = (-1)^n$.

   On calcule de même $p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n = a_{n+1}p_{n+1}q_n + p_nq_n - a_{n+1}q_{n+1}p_n - q_np_n = a_{n+1}(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) = (-1)^n a_{n+1}$ d'après le calcul précédent.

4. Par définition, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_nq_{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}$. De même, $x_{n+2} - x_n = \dfrac{p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n}{q_nq_{n+2}} = \dfrac{(-1)^n a_{n+1}}{q_nq_{n+2}}$.

5. D'après la question précédente, $x_{2n+2} - x_{2n} = \dfrac{a_{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+2}} > 0$ puisque les suites (a_n) et (q_n) sont à valeurs positives. De même, $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -\dfrac{a_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+3}} < 0$, donc la suite (x_{2n}) est croissante et la suite (x_{2n+1}) décroissante (c'est cohérent avec les quelques valeurs calculées à la première question de l'exercice). Ensuite, $x_{2n+1} - x_{2n} = \dfrac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2n(2n+1)}$ d'après la question 2, ce qui suffit largement à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} - x_{2n} = 0$ (théorème des gendarmes, puisque cet écart est positif vu son expression). Les deux suites sont bien adjacente, et convergent donc vers une même limite. Cela suffit à affirmer que la suite (x_n) converge elle-même vers cette limite commune (théorème du cours).

6. Par définition, $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_0a_1+1}{a_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$. De même, $x_2 = \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{a_2p_1+p_0}{a_2q_1+q_0} = \dfrac{a_2a_0a_1+a_2+a_0}{a_2a_1+1} = a_0 + \dfrac{a_2}{a_2a_1+1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$, qui est bien la formule souhaitée.

7. On peut s'en sortir à l'aide d'une simple récurrence un peu astucieuse : notons P_n la propriété qui affirme que (x_n) a la forme donnée dans l'énoncé **quelle que soit la suite** (a_n) **définissant les suites** (p_n)**,** (q_n) **et** (x_n). La propriété P_0 est manifestement vraie puisqu'elle stipule que $x_0 = a_0$, ce qui découle immédiatement de la définition des valeurs de p_0 et de q_0. Supposons maintenant la formule vraie au rang n. Au lieu d'appliquer l'hypothèse de récurrence, on va l'appliquer à la suite (a'_n) définie par : $\forall k < n$, $a'_k = a_k$ et $a'_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ (et peu importe ce qu'on fait pour les termes suivants, on n'en aura pas besoin pour prouver l'hérédité). On notera y_n l'équivalent de x_n défini à partir de la suite (a'_n). Puisque la propriété P_n est supposée vraie pour toute suite, on peut alors affirmer que $y_n = a_0 + \dfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a'_n}}}} = a_0 + \dfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a_{n+1}}}}}$. Il suffit donc de prouver que $x_{n+1} = y_n$ pour que l'hérédité de notre récurrence soit prouvée. Or, $x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}$. Avec la définition donnée pour a'_n, on peut écrire $a_{n+1} = \dfrac{1}{a'_n - a_n}$, remplaçons dans l'expression de x_{n+1}, en multipliant numérateur et dénominateur par $a'_n - a_n$: $x_{n+1} = \dfrac{p_n + (a'_n - a_n)p_{n-1}}{q_n + (a'_n - a_n)q_{n-1}}$. Remplaçons désormais p_n et q_n en appliquant la relation de récurrence définissant les deux suites pour trouver $x_{n+1} = \dfrac{a_np_{n-1} + p_{n-2} + (a'_n - a_n)p_{n-1}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2} + (a'n - a_n)q_{n-1}} = \dfrac{a'np_{n-1} + p_{n-2}}{a'_nq_{n-1} + q_{n-2}}$. Or, ce quotient est exactement égal à y_n (en notant $p'n$ et $q'n$ les équivalents de p_n et q_n pour la suite (a'_n), numérateur et dénominateur sont simplement égaux à p'_n et q'_n puisque $p_{n-2} = p'_{n-2}$ et $q_{n-2} = q'_{n-2}$). On a bien prouvé que $x_{n+1} = y_n = a_0 + \dfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a_{n+1}}}}}$.

8. Puisque les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes de limite commune α, avec de plus $x_{2n} < x_{2n+1}$, on peut affirmer que $x_0 < \alpha < x_1$. Comme par ailleurs $x_0 = a_0 \in \mathbb{N}$ et $x_1 - x_0 = \dfrac{1}{a_1} \leqslant 1$ (puisque a_1 est lui-même entier), on a donc $a_0 < \alpha < a_0 + 1$, ce qui suffit à affirmer que $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$.

9. (a) Manifestement, $\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ (il n'y pas grand chose à justifier, c'est la définition même de α_n).

   (b) On peut simplement effectuer un calcul par récurrence : une fois connues les valeurs de a_n et de α_n, on calcule d'abord $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$ (relation de la question précédente), puis on peut ensuite calculer $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$ (c'est le même principe que pour le calcul de a_0, il suffit de constater que α_{n+1} est toujours supérieur ou égal à 1, ce qui est évident vu sa définition puisqu'on ajoute à un entier non nul a_{n+1} une fraction manifestement positive). Comme on connait les valeurs de $\alpha_0 = \alpha$ et de a_0 (question précédente), on peut initialiser sans problème le calcul.

(c) Calculons donc : $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, puis $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_0 - a_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ (mutliplication par la quantité conjuguée). On en déduit $a_1 = \lfloor \sqrt{2}+1 = 2$, puis $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$. Inutile de pousser plus loin les calculs, on aura désormais $a_n = 2$ puis $\alpha_{n+1} = \sqrt{2}+1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

(d) On vient de le dire : $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_n = 2$. Oh mais ne serait-ce point par hasard le cas particulier étudié en question 1 ? Quel hasard exatrordinaire. On a donc prouvé indirectement que ce cas particulier donne une suite (x_n) convergeant vers $\sqrt{2}$, ou si on préfère que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$. Étonnant, non ?

(e) On part donc cette fois-ci de $\alpha = \sqrt{3}$, et on calcule de même : $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, puis $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \simeq 1.4$. On continue : $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$, donc $\alpha_2 = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \simeq 2.7$. Bon, les calculs ne semblent jusqu'ici pas se répéter mais ça va venir : $a_2 = 2$, donc $\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \alpha_1$. À partir de là, les calculs vont boucler périodiquement : $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ si n est impair, $\alpha_n = \sqrt{3}+1$ si n est pair (non nul), donc $a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n} = 2$ (sauf pour $n = 0$. Autrement dit, $\sqrt{3} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\dots}}}}$.

Exercice 3

A. Étude d'un exemple.

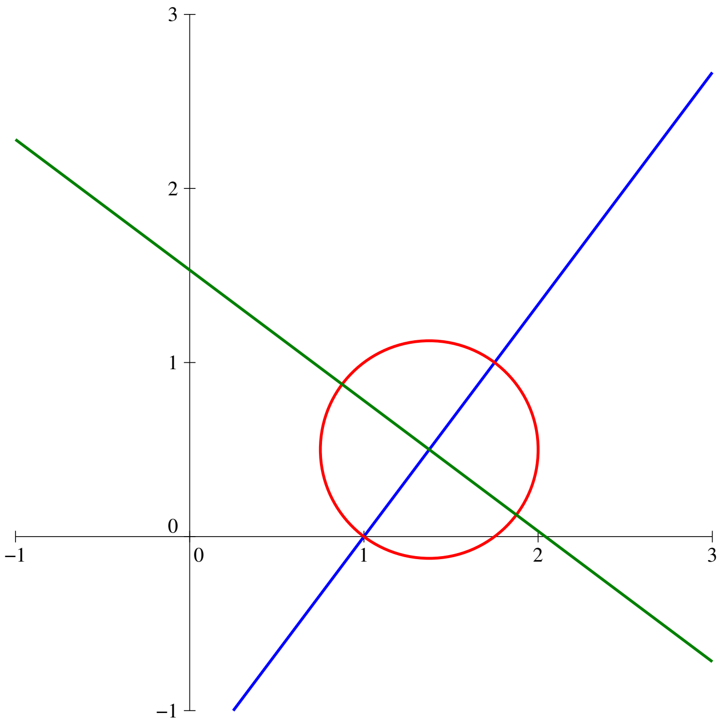
1. Posons donc $Z = f(z) = \dfrac{z - \frac{7}{4} - i}{z-1}$ (avec bien sûr $z \neq 1$), on en déduit que $Zz - Z = z - \dfrac{7}{4} - i$, soit $z(Z-1) = Z - \dfrac{7}{4} - 1$. Si $Z = 1$, cette équation n'a pas de solution, mais dans le cas contraire, on peut écrire $z = \dfrac{Z - \frac{7}{4} - i}{Z-1} = f(Z)$. Ceci prouve que f est bijective et qu'elle est sa propre réciproque.

2. Calculons la forme algébrique de $f(z)$ en posant $z = a + ib$: $\dfrac{a+ib-\frac{7}{4}-i}{a+ib-1}$ $= \dfrac{(a+ib-\frac{7}{4}-i)(a-1-ib)}{(a-1)^2+b^2}$. Le dénominateur de cette fraction étant un réel positif, $f(z) \in \mathbb{R}$ si la partie imaginaire du numérateur est nulle. Développons uniquement la partie imaginaire du numérateur, qui est égale à $b(a-1) - (a-1) - ab + \dfrac{7}{4}b = 1 - a + \dfrac{3}{4}b$. Autrement dit, $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - a + \dfrac{3}{4}b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{4}{3}a - \dfrac{4}{3}$. Il s'agit d'une droite dans le plan complexe (en bleu sur le schéma suivant la question 4).

3. On reprend le calcul effectué à la question précédente, mais en gardant cette fois-ci la partie réelle du numérateur, qui est égale à $a(a-1) - \dfrac{7}{4}(a-1) + b^2 - b = a^2 + b^2 - \dfrac{11}{4}a - b + \dfrac{7}{4}$. On

reconait une équation de cercle : $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(a - \frac{11}{8}\right)^2 - \frac{121}{64} + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 0$, soit $\left(a - \frac{11}{8}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{121 - 96}{64} = \frac{25}{64}$. On reconnait donc le cercle de centre $A\left(\frac{11}{8} + \frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{5}{8}$ (tracé en rouge sur le schéma suivant la question 4).

4. En revenant à la forme initiale, $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|z - \frac{7}{4} - i\right| = |z-1|$. Quitte à tout élever au carré et à poser comme d'habitude $z = a + ib$, on trouve alors $\left(a - \frac{7}{4}\right)^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + b^2$, donc $a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{49}{16} + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 2a + 1 + b^2$, soit encore $\frac{49}{16} = \frac{3}{2}a + 2b$. Il s'agit à nouveau d'une droite, dont on peut écrire l'équation cartésienne sous une forme plus classique : $b = -\frac{3}{4}a + \frac{49}{32}$. Cette droite n'est autre que la médiatrice du segment les points d'affixe 1 et $\frac{7}{4} + i$ (l'égalité de modules dont on est partis signifie exactement qu'on cherche les points équidistants de ces deux points, ce qui correspond géométriquement à la médiatrice). Sur le schéma ci-dessous, cette droite est tracée en vert :



5. En multipliant par le dénominateur, on doit résoudre l'équation $z^2 - z = z - \frac{7}{4} - i$, soit $z^2 - 2z + \frac{7}{4} + i = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 4 - 7 - 4i = -3 - 4i$. Cherchons un nombre complexe $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient les deux conditions $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$, auxquelles on ajoute l'égalité des modules $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{9 + 16} = 5$. L'addition de cette équation avec la première obtenue donne $2a^2 + 2$, donc $a = \pm 1$, la soustraction des deux mêmes équations donne $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme l'équation restante implique a et b sont de signe opposé, on peut par exemple prendre $\delta = 1 - 2i$. On calcule alors les deux solutions de notre équation : $a = \frac{2 - 1 + 2i}{2} = \frac{1}{2} + i$ et $b = \frac{2 + 1 - 2i}{2} = \frac{3}{2} - i$.

6. Calculons : $\dfrac{a-1}{b-1} = \dfrac{-\frac{1}{2}+i}{\frac{1}{2}-i} = -1$.

7. Là encore on peut faire un calcul brutal : en mettant au même dénominateur, $\dfrac{f(z)-b}{f(z)-a} = \dfrac{z-\frac{7}{4}-i-(z-1)(\frac{3}{2}-i)}{z-\frac{7}{4}-i-(z-1)(\frac{1}{2}+i)} = \dfrac{(i-\frac{1}{2})z-\frac{1}{4}-2i}{(\frac{1}{2}-i)z-\frac{5}{4}}$. Or, $\left(\dfrac{1}{2}-i\right)(z-b) = \left(\dfrac{1}{2}-i\right)\left(z-\dfrac{3}{2}+i\right) = \left(\dfrac{1}{2}-i\right)z - \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}i+\dfrac{3}{2}i+1 = \left(\dfrac{1}{2}-i\right)z+\dfrac{1}{4}+2i$ est exactement l'opposé du numérateur obtenu, et $\left(\dfrac{1}{2}-i\right)(z-a) = \left(\dfrac{1}{2}-i\right)\left(z-\dfrac{1}{2}-i\right) = \left(\dfrac{1}{2}-i\right)z-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1}{2}i-1$ est exactement égal au dénominateur. Autrement dit, $\dfrac{f(z)-b}{f(z)-a} = -\dfrac{(\frac{1}{2}-i)(z-b)}{(\frac{1}{2}-i)(z-a)} = -\dfrac{z-b}{z-a}$.

8. Posons $z = a+ib$ (oui, mes notations sont un peu problématiques dans la mesure où a et b désignent déjà les points fixes, mais comme on va remplacer ces derniers par leurs affixes ce n'est pas très gênant) et élevons tout au carré (y compris le facteur 2, bien entendu) : $\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+(b+1)^2 = 4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+4(b-1)^2$. On développe tout brutalement : $a^2-3a+\dfrac{9}{4}+b^2+2b+1 = 4a^2-4a+1+4b^2-8b+4$, soit en passant tout à droite $3a^2+3b^2-a-10b+\dfrac{7}{4}=0$. Pour reconnaitre plus facilement le cercle on va tout diviser par 3 : $a^2+b^2-\dfrac{1}{3}a-\dfrac{10}{3}b+\dfrac{7}{12}=0$, puis on met sous forme canonique : $\left(a-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{1}{36}+\left(b-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}+\dfrac{7}{12}=0$. On obtient finalement la forme factorisée $\left(a-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(b-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{20}{9}$ qui permet de reconnaitre le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{3}+i\right)$ et de rayon $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

9. Si M est un point du cercle, son affixe vérifie par définition $|z-b| = 2|z-a|$, donc $\left|-\dfrac{z-b}{z-a}\right| = 2$. D'après la question 7, on aura alors également $\left|\dfrac{f(z)-b}{f(z)-a}\right| = 2$, donc $|f(z)-b| = 2|f(z)-a|$. Autrement dit, l'image de M apartiendra au même cercle que M. La réciproque étant également vraie (puisque $f^{-1}=f$, elle vérifie bien sûr les mêmes propriétés !), on peut en fait conclure que le cercle est sa propre image par f. Si on veut tout à fait rigoureux, on peut même préciser que le point d'affixe 1 appartient au cercle et qu'il faut donc l'enlever avant de calculer l'image.

B. Birapport et homographies.

1. Calculons : $\dfrac{5-(5-2i)}{5-(-1+2i)} \times \dfrac{1+4i-(-1+2i)}{1+4i-(5+2i)} = \dfrac{2i}{6-2i} \times \dfrac{2+2i}{-4+2i} = \dfrac{2i(6+2i)}{40} \times \dfrac{(2+2i)(-4-2i)}{20} = \dfrac{(12i-4)(-4-12i)}{40\times 20} = \dfrac{16+144}{800} = \dfrac{1}{5} \in \mathbb{R}$. Les points n'étant manifestement pas alignés (le premier et le troisième ont la même abscisse mais pas les deux autres), ils sont donc cocycliques.

2. Le centre du cercle doit par définition être équidistant des quatre points. En particulier il appartient à la médiatrice des points d'affixes 5 et $5+2i$, donc a une partie imaginaire égale à 1 (si ça ne vous semble pas évidente, un peu de révisions de géométrie pourrait s'avérer nécessaire). De même, il doit être sur la médiatrice des points d'affixes $5+2i$ et $-1+2i$, ce qui impose une partie réelle égale à 2. Autrement dit, notre centre est nécessairement le point $O(2+i)$. On obtient ensuite le rayon en calculant une des quatre distances au choix,

par exemple $\sqrt{(2-5)^2+1^2}=\sqrt{10}$ (on peut d'ailleurs vérifier rapidement que les trois autres distances sont égales).

3. Il suffit d'écrire que $\dfrac{f(a)-f(c)}{f(a)-f(d)} \times \dfrac{f(b)-f(d)}{f(b)-f(c)} = \dfrac{\alpha a-\alpha c}{\alpha a-\alpha d} \times \dfrac{\alpha b-\alpha d}{\alpha b-\alpha c} = \dfrac{a-c}{a-d} \times \dfrac{b-d}{b-c}$.
4. Là encore un calcul assez facile : $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}} \times \dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{d}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \dfrac{ad(c-a)}{ac(d-a)} \times \dfrac{bc(d-b)}{bd(c-b)} = \dfrac{c-a}{d-a} \times \dfrac{d-b}{d-c} = \mathcal{B}(a,b,c,d)$.
5. Pour le coup, c'est complètement évident : $\mathcal{B}(g(f(a)),g(f(b)),g(f(c)),g(f(d)))$ $= \mathcal{B}(f(a),f(b),f(c),f(d)) = \mathcal{B}(a,b,c,d)$ en appliquant successivement l'invariance du birapport par g puis par f.
6. On peut écrire $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{\frac{a}{c}(cz+d)-\frac{ad}{c}+b}{cz+d}$. En posant $\alpha = b-\dfrac{ad}{c}$ et $\beta=\dfrac{a}{c}$, on obtient alors $f(z)=\alpha g(z)+\beta$, en notant $g(z)=\dfrac{1}{cz+d}$. Autrement dit, une homographie est la composée d'une « application affine » et d'une application g qui est elle-même la composée de la fonction inverse par une application affine. Les trois questions précédentes assurent alors que f conserve le birapport.
7. Posons $a=p$, $b=q$, $c=z$ et $d=z'$, alors la conservation du birapport par f assure que $\dfrac{z-p}{z'-p} \times \dfrac{z'-q}{z-q} = \dfrac{f(z)-p}{f(z')-p} \times \dfrac{f(z')-q}{f(z)-q}$ (les points fixes ont par définition une image par f égale à eux-même). Autrement dit, $\dfrac{z-q}{z-p} \times \dfrac{f(z)-p}{f(z)-q} = \dfrac{z'-q}{z'-p} \times \dfrac{f(z')-p}{f(z')-q}$. La quantité $k=\dfrac{f(z)-p}{f(z)-q} \times \dfrac{z-q}{z-p}$ ne dépend donc pas du choix de z, c'est bien une constante complexe.
8. On va inverser numérateur et dénominateur et on obtiendra donc une seconde valeur du rapport qui sera l'inverse de la précédente.