Devoir Surveillé n^o 5

MPSI Lycée Camille Jullian

15 janvier 2022

Exercice 1

Dans tout cet exercice on s'intéresse à des polynômes P de degré n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1, et on souhaite obtenir un encadrement sur le module (ou la valeur absolue si elles sont réelles) des racines de tels polynômes.

1. Déterminer les racines du polynôme $P = X^2 + X - 1$, ainsi que leur module. Vérifier que ce module est toujours compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 2.
2. Même question pour le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1$.
3. On pose cette fois-ci $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Montrer que les racines du polynôme appartiennent toutes à l'ensemble $\mathbb{U}_5$ des racines cinquièmes de l'unité. En déduire leur module.
4. Combien existe-t-il de polynômes de degré exactement n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 ?
5. En déduire le nombre total de polynômes de degré inférieur ou égal à n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1.
6. On retourne au cas général : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX_n$, avec $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$.
   (a) Montrer que, si $|z| < 1$, alors $|a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n| \leqslant \dfrac{|z|}{1 - |z|}$.
   (b) En déduire que toutes les racines de P dont le module est inférieur à 1 vérifient $|z| \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) Montrer que, si z est une racine de P dont le module est supérieur à 1, alors $|z| \leqslant 2$ (on montrera que $\dfrac{1}{z}$ est aussi racine d'un polynôme à coefficients égaux à 1 ou -1).
   (d) Les nombres 2 et $\dfrac{1}{2}$ peuvent-ils être racines du polynôme P ?

Exercice 2

Soit (a_n) une suite fixée d'entiers naturels. On définit à partir de la suite (a_n) deux nouvelles suites (p_n) et (q_n) par récurrence : $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$, puis ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ et $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$. On posera également $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

1. Uniquement dans cette question, on suppose que la suite (a_n) est définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_n = 2$. Calculer alors les valeurs de p_n et q_n pour tous les entiers $n \leqslant 4$, ainsi que les valeurs de x_n pour ces mêmes entiers.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.
3. Calculer $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n$ et $p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n$.
4. Calculer $x_{n+1} - x_n$, puis $x_{n+2} - x_n$ en fonction des valeurs prises par les suites (a_n) et (q_n).
5. Montrer que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur la suite (x_n) ? On notera désormais α la limite de la suite (x_n).
6. Vérifier que $x_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$ et $x_2 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$.
7. Montrer plus généralement que $x_n = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$.
8. En comparant x_0, x_1 et α, montrer que $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$.

9. On note désormais $\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}+\frac{1}{a_{n+3}+\cdots}}}$ (la suite de fractions étant **infinie**, il s'agit techniquement de la limite de la suite (x_n) correspondant à la suite $(a_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$). En particulier, $\alpha_0 = \alpha$.
   (a) Déterminer une relation entre α_n, α_{n+1} et a_n.
   (b) Décrire un algorithme permettant de calculer les termes de la suite (a_n) à partir de la valeur de α.
   (c) Lorsque $\alpha = \sqrt{2}$, calculer a_0, a_1, a_2, a_3, et les valeurs correspondantes de α_n.
   (d) Que vaudra plus généralement a_n (toujours pour $\alpha = \sqrt{2}$) ?
   (e) Déterminer de même une écriture de $\sqrt{3}$ sous forme de « fraction infinie » (on parle de développement en fraction continue).

Exercice 3

Une homographie complexe est une application de la forme $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des homographies.

A. Étude d'un exemple.

On pose dans toute cette première partie $f(z) = \dfrac{z - \frac{7}{4} - i}{z-1}$.

1. Montrer que f effectue une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ vers lui-même, et donner l'expression de sa réciproque f^{-1}. Que constate-t-on de remarquable ?
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ et représenter cet ensemble dans le plan complexe.
3. Même question pour l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$.
4. Même question pour l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$. Que représente l'ensemble obtenu pour les points d'affixes 1 et $\dfrac{7}{4} + i$?
5. Déterminer les solutions de l'équation $f(z) = z$, qu'on notera pour la suite a et b (a est la solution ayant la partie réelle la plus petite des deux).
6. Calculer $\dfrac{a-1}{b-1}$.
7. Montrer que, si $z \notin \{1, a\}$, $\dfrac{f(z)-b}{f(z)-a} = -\dfrac{z-b}{z-a}$.
8. Montrer que l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z-b| = 2|z-a|$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
9. Que peut-on dire de l'image de ce cercle par l'application f ?

B. Birapport et homographies.

Le birapport de quatre nombres complexes a, b, c et d est défini par $\mathcal{B}(a,b,c,d) = \dfrac{a-c}{a-d} \times \dfrac{b-d}{b-c}$. On admet que les quatre nombres complexes a, b, c et d ont une image alignée ou cocyclique dans le plan complexe si et seulement si leur birapport est un nombre réel.

1. Calculer $\mathcal{B}(5, 1+4i, 5+2i, -1+2i)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$ contenant les points d'affixes 5, $1+4i$, $5+2i$ et $-1+2i$.
3. Montrer que l'application $f : z \mapsto \alpha z + \beta$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, conserve le birapport : $\mathcal{B}(f(a), f(b), f(c), f(d)) = \mathcal{B}(a,b,c,d)$.
4. Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ conserve également le birapport.
5. Montrer que la composée de deux applications conservant le birapport conserve le birapport.
6. En déduire que les homographies conservent le birapport.
7. Soit f une homographie admettant deux points fixes distincts d'affixes respectives p et q. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe k tel que $\dfrac{f(z)-p}{f(z)-q} = k \times \dfrac{z-p}{z-q}$. Ce nombre est appelé rapport de l'homographie f.
8. Qu'arrive-t-il au rapport de f si on échange le rôle des deux points fixes p et q ?