Devoir Surveillé n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 décembre 2021

Exercice 0

Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants, commençons par résoudre l'équation caractéristique associée $2r^2-5r+3=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25-24 = 1$, et pour racines $r_1 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $r_2 = \dfrac{5-1}{4} = 1$ (qui pouvait aussi être donnée comme racine évidente). Les solutions de l'équation homogène associée sont donc toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{\frac{3}{2}x}+Be^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Puisque le second membre est de la forme « polynôme exponentielle » avec un facteur qui est racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière y_p d'expression $y_p(x) = (ax^2+bx)e^x$. On aura alors $y_p'(x) = (2ax+b+ax^2+bx)e^x$, puis $y_p''(x) = (ax^2+(4a+b)x+2a+2b)e^x$, donc y_p est solution si et seulement si (en simplifiant par e^x) $2ax^2+(8a+2b)x+4a+4b-5ax^2-(10a+5b)x-5b+3ax^2+3bx = x$, soit $-2ax+4a-b = x$. Par identification des coefficients, on a $a = -\dfrac{1}{2}$, puis $b = 4a = -2$. Autrement dit, $y_p(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x^2-2x\right)e^x$, et les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ae^{\frac{3}{2}x} + \left(B - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1

1. L'équation n'est pas à coefficients constants, et le second membre n'est pas d'un type qu'on sait gérer (puissance non entière).
2. Posons donc $y(x) = z(\ln(x))$, et dérivons deux fois : $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. La fonction z va donc vérifier l'équation $-4z'(\ln(x)) + 4z''(\ln(x)) + z(\ln(x)) = 4\sqrt{x}$, soit $4z''(t) - 4z'(t) + z(t) = 4e^{\frac{t}{2}}$, comme annoncé.
3. Il s'agit d'une équation à coefficients constants, dont l'équation caractéristique $4r^-4r+1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16-16 = 0$ et admet donc pour racine double $r_0 = \dfrac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc toutes les fonctions de la forme $z_h : t \mapsto (At+B)e^{\frac{t}{2}}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. On doit chercher une solution particulière sous la forme $z_p(t) = Kt^2e^{\frac{t}{2}}$ puisque $\dfrac{1}{2}$ est racine double de l'équation caractéristique. On calcule alors $z_p'(t) = \left(2Kt + \dfrac{K}{2}t^2\right)e^{\frac{t}{2}}$, puis $z_p''(t) = \left(\dfrac{K}{4}t^2 + 2Kt + 2K\right)e^{\frac{t}{2}}$. La fonction z_p est donc solution de (E') si $Kt^2 + 8Kt + 8K - 8Kt - 2Kt^2 + Kt^2 = 4$ (après simplification des exponentielles), soit $8K = 4$ et donc $K = \dfrac{1}{2}$. Notre solution particulière est donc donnée par $z_p(t) = \dfrac{1}{2}t^2e^{\frac{t}{2}}$, et les solutions de (E') sont toutes les fonctions de la forme $z : t \mapsto \left(\dfrac{1}{2}t^2 + At + B\right)e^{\frac{t}{2}}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

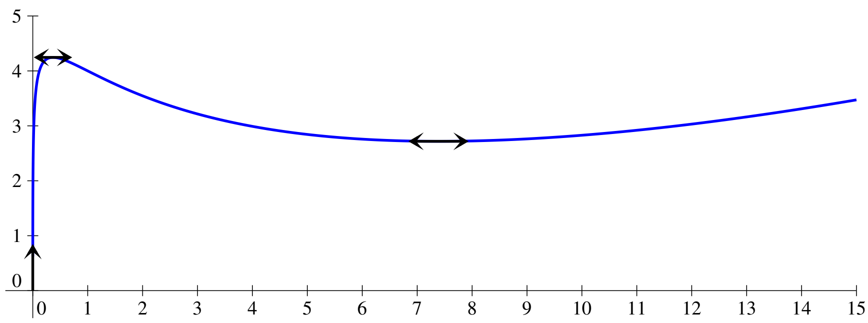
   Il ne reste plus qu'à remonter le changement de variable : les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\ln^2(x) + A\ln(x) + B\right)\sqrt{x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}$.
4. Pour exploiter la deuxième condition, on dérive l'équation obtenue à la question précédente : $y'(x) = \left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{A}{x}\right)\sqrt{x} + \left(\dfrac{1}{2}\ln^2(x) + A\ln(x) + B\right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La condition $y'(1) = -\dfrac{1}{2}$ donne donc $A + \dfrac{B}{2} =$

$-\frac{1}{2}$, et $y(1) = 4$ se traduit par $B = 4$, donc on aura $A = -\frac{5}{2}$, et $f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x)\sqrt{x} - \frac{5}{2}\ln(x)\sqrt{x} + 4\sqrt{x}$.

5. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} \ln^2(x)\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\sqrt{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. De l'autre côté, on peut faire une factorisation brutale : $f(x) = \ln^2(x)\sqrt{x}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2\ln(x)} + \frac{4}{\ln^2(x)}\right)$, et il n'y a plus de forme indéterminée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
6. On a déjà calculé f' un peu plus haut puisqu'on a calculé la dérivée de toutes les solutions de (E), mais recommençons : $f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln^2(x)}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{5\ln(x)}{4\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln^2(x) - \ln(x) - 2}{4\sqrt{x}}$. Cette dérivée est du signe de $\ln^2(x) - \ln(x) - 2$. Posons donc $X = \ln(x)$, le trinôme $X^2 - X - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$ et pour racines $X_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Notre dérivée sera donc négative lorsque $X \in [-1, 2]$, c'est-à-dire sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$. Calculons donc les valeurs corrspondantes pour la fonction : $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e}} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{e}} + 4\sqrt{\frac{1}{e}} = \frac{7}{\sqrt{e}}$, et $f(e^2) = 2e - 5e + 4e = e$. Avec les limites calculées précédemment, on peut donc dresser le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		e^2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

7. On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln^2(x) - \ln(x) - 2 = +\infty$, donc même pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de f admettre en 0 une tangente verticale (si on prolonge la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$).
8. Voici l'allure demandée :



Exercice 2

1. C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, à coefficients non constants. La normalisation de l'équation impose une division par le coefficient $1 + 2x$ qui s'annule en $-\frac{1}{2}$, et oblige donc à exclure cette valeur de notre intervalle de résolution, d'où le choix de l'intervalle I.
2. Posons donc $y_p(x) = e^{kx}$, alors $y_p'(x) = ke^{kx}$ et $y_p''(x) = k^2e^{kx}$, donc y_p est solution de (E) si et seulement si (après simplification par e^{kx}) $(1+2x)k^2 + (4x-2)k - 8 = 0$, soit $x(2k^2+4x) + k^2 - 2k - 8 = 0$. Pour que cette expression s'annule quelle que soit la valeur de x appartenant à I, il faut que les deux coefficients soient nuls, donc que $2k^2 + 4k = k^2 - 2k - 8 = 0$. Comme $k^2 + 4k$ s'annule pour $k = 0$ et $k = -2$ et que $(-2)^2 - 2 \times (-2) - 8 = 0$, on peut donc choisir $k = -2$.
3. Posons plutôt $y(x) = z(x)e^{-2x}$ et dérivons deux fois : $y'(x) = z'(x)e^{-2x} - 2z(x)e^{-2x}$, puis $y''(x) = z''(x)e^{-2x} - 4z'(x)e^{-2x} + 4z(x)e^{-2x}$. En remplaçant tout dans l'équation (E) et en simplifiant bien sûr les exponentielles, on a donc $(1 + 2x)(z'' - 4z' + 4z) + (4x - 2)(z' - 2z) - 8z = 0$, soit $(1 + 2x)z'' + (-4 - 8x + 4x - 2)z' + (4 + 8x - 8x + 4 - 8)z = 0$. Comme attendu, les termes en z

se simplifient pour laisser $(1+2x)z''-(4x+6)z'=0$, qui est bien une équation linéaire (et même homogène) du premier ordre en la variable z'.

4. On peut utiliser une petite « astuce belge » : $\dfrac{4x+6}{2x+1}=\dfrac{4x+2}{2x+1}+\dfrac{4}{2x+1}=2+\dfrac{2\times 2}{2x+1}$, qui admet par exemple pour primitive $A : x\mapsto 2x+2\ln(2x+1)$.
5. À la surprise générale, la primitive calculée à la question précédente est justement celle dont nous avions besoin pour résoudre (E'), les fonctions solutions z' sont donc toutes les fonctions de la forme $x\mapsto Ke^{2x2\ln(2x+1)}=Ke^{2x}(2x+1)^2$, avec $K\in\mathbb{R}$.
6. Il faut commencer par déduire de ce qui précède les fonctions z possibles à l'aide d'un calcul de primitive. Ici, on veut bien sûr **toutes** les solutions de l'équation, donc toutes les primitives possibles. Le calcul de primitive va de toute façon nécessiter une double IPP : posons $z(x)=\displaystyle\int^x Ke^{2t}(2t+1)^2\,dt$, et posons dans un premier temps $u(t)=(2t+1)^2$, donc $u'(t)=4(2t+1)$ et $v'(t)=e^{2t}$ qu'on peut intégrer en $v(t)=\dfrac{e^{2t}}{2}$. On obtient $z(x)=\dfrac{Ke^{2x}(2x+1)^2}{2}-2K\displaystyle\int^x(2t+1)e^{2t}\,dt$. On recommence : $u(t)=2t+1$, donc $u'(t)=2$ et les mêmes fonctions pour v et v'. On a alors $z(x)=\dfrac{1}{2}Ke^{2x}(2x+1)^2-K(2x+1)e^{2x}+2K\displaystyle\int^x e^{2t}\,dt=\dfrac{1}{2}Ke^{2x}(2x+1)^2-K(2x+1)e^{2x}+Ke^{2x}+L$, avec $(K,L)\in\mathbb{R}^2$. Développons donc la première partie de la formule : $\dfrac{1}{2}K(2x+1)^2-K(2x+1)+K=2Kx^2+2Kx+\dfrac{1}{2}K-2Kx-K+K=2Kx^2+\dfrac{1}{2}K$. Quitte à poser $K'=\dfrac{1}{2}K$, on peut donc écrire nos solutions sous la forme $z(x)=K'(4x^2+1)e^{2x}+L$, avec $(K',L)\in\mathbb{R}^2$. Il ne reste plus que le calcul le plus trivial : multiplier par e^{2x} pour retrouver les solutions de l'équation (E), qui sont donc toutes les fonctions de la forme $y(x)=K'(4x^2+1)+Le^{-2x}$.
7. Avec la formule de la question précédente, on aura $y'(x)=8K'x-2Le^{-2x}$, puis $y''(x)=8K'+4Le^{-2x}$. En notant K_1' et L_1 les constantes correspondant au recollement souhaité sur l'intervalle $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$, on doit donc avoir les trois conditions suivantes :

   - pour la continuité en $-\dfrac{1}{2}$, $2K'+eL=2K_1'+eL_1$.
   - pour la dérivabilité, $-4K'-2eL=-4K_1'-2eL_1$.
   - pour la continuité de la dérivée seconde, $8K'+4eL=8K_1'+4eL_1$.

   Ces trois conditions sont absolument équivalentes, il suffit donc d'avoir $K_1'=K'+\dfrac{e}{2}(L-L_1)$ pour que les courbes se recollent. Autrement dit, non seulement on a des solutions de l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais on en a même énormément. Note pour les paresseux : vu la formulation de la question, la réponse « Oui, la fonction nulle convient » pouvait difficilement être refusée.
8. Avec les notations précédentes, $y(0)=1$ si $K'+L=1$. Ensuite, la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=y'(0)x+y(0)=-2Lx+1$, donc elle couple l'axe des abscisses en $x=1$ si et seulement si $-2L+1=0$, donc si $L=\dfrac{1}{2}$, ce qui implique $K'=\dfrac{1}{2}$. À la surprise générale si on a fait l'effort de lire l'énoncé de la question suivante avant de traiter celle-ci, la solution cherchées est définie par $y(x)=\dfrac{1}{2}(4x^2+1)+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$.
9. (a) On applique bêtement le calcul générale effectué plus haut en posant $K'=L=\dfrac{1}{2}$, ce qui donne $y''(x)=4+2e^{-2x}$. Cette dérivée seconde étant très manifestement positive, la fonction y est donc convexe.

   (b) On sait que y' est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et bien sûr continue, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (les limites sont évidentes vu la formule explicite calculée plus haut). Notre dérivée s'annule donc une seule fois. Comme de plus $y'(0)=-2L=-1$, et $y'\left(\dfrac{1}{4}\right)=2K'-2Le^{-\frac{1}{2}}=1-e^{-\frac{1}{2}}>0$, la fonction s'annule nécessairement dans l'intervalle $\left]0,\dfrac{1}{4}\right[$.

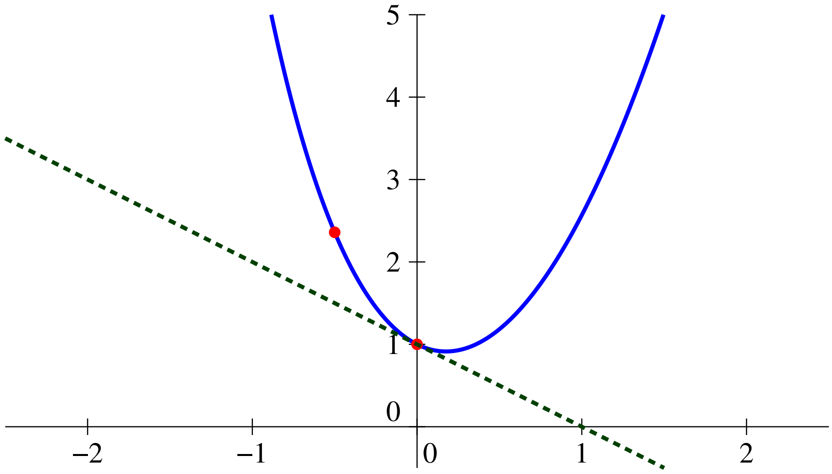
   (c) Par définition, α vérifie $y'(\alpha)=0$, donc $4\alpha-e^{-2\alpha}=0$. On en déduit que $e^{-2\alpha}=4\alpha$, puis que $y(\alpha)=\dfrac{1}{2}(1+4\alpha^2)+\dfrac{1}{2}\times(4\alpha)=2\alpha^2+2\alpha+\dfrac{1}{2}$. L'encadrement évident consiste à utiliser que

$0 < \alpha < \dfrac{1}{4}$, donc $0 < \alpha^2 < \dfrac{1}{16}$, dont on déduit que $\dfrac{1}{2} < y(\alpha) < \dfrac{9}{8}$ (pas terrible mais difficile de faire mieux avec les informations qu'on possède).

(d) Les limites de y sont tout aussi évidentes que celles de y' : $\underset{x\to-\infty}{y}(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée non plus). De plus, $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2K' + eL = 1 + \dfrac{e}{2} \simeq 2.4$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{e}{2}$	$\searrow$	$y(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(e) Il ne faut bien sûr pas oublier que $y(0) = 1$ et que la tangente à cet endroit doit couper l'axe des abscisses en $x = 1$. Le minimum sera par contre placé de façon nécessairement approximative :



Problème : à propos des équations différentielles d'ordre 3.

A. Généralités.

1. Par définition, $d(x) = f''' + af'' + bf' + cf$, donc y est solution de (E) si et seulement si $y''' + ay'' + by' + cy = f''' + af'' + bf' + cf$, soit $(y-f)''' + a(y-f)'' + b(y-f)' + c(y-f) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $y - f$ est solution de (H).
2. Supposons donc $y_p(x) = Ae^{kx}$, alors $y_p'(x) = kAe^{kx}$, $y_p''(x) = k^2Ae^{kx}$ et $y_p'''(x) = k^3Ae^{kx}$. La fonction y_p est donc solution de (E) (après simplification par les exponentielles) si et seulement si $A(k^3 + ak^2 + bk + c) = 1$. Si k est solution de l'équation caractéristique, cette équation n'a manifestement pas de solution, mais dans le cas contraire, il suffit de poser $A = \dfrac{1}{k^3 + ak^2 + bk + c}$ pour obtenir une solution de (E).
3. On doit avoir $r^3 + ar^2 + br + c = (r-k)^3 = r^3 - 3r^2k + 3rk^2 - k^3$. Par identification des coefficients, $a = -3k$, donc $6k + 2a = 2(a + 3k) = 0$, puis $3k^2 = b$, donc $3k^2 + 2ak + b = 3k^2 - 6k^2 + 3k = 2 = 0$, et enfin $c = -k^3$, donc $k^3 + ak^2 + bk + c = k^3 - 3k^3 + 3k^2 - k^3 = 0$ (cette dernière égalité était de toute façon triviale puisqu'elle indique juste que k est racine de l'équation caractéristique).
4. Posons donc $y_p(x) = Ax^3e^{kx}$, alors $y_p'(x) = (kAx^3 + 3Ax^2)e^{kx}$, $y_p''(x) = (k^2Ax^3 + 6kAx^2 + 6Ax)e^{kx}$ et $y_p'''(x) = (k^3Ax^3 + 9k^2Ax^2 + 18kAx + 6A)e^{kx}$. La fonction y_p est donc solution de (E) (toujours en se débarassant des exponentielles) si $k^3Ax^3 + 9k^2Ax^2 + 18kAx + 6A + ak^2Ax^3 + 6akAx^2 + 6aAx + bkAx^3 + 3bAx^2 + cAx^3 = 1$, soit $A(k^3 + ak^2 + bk + c)x^3 + A(9k^2 + 6ak + 3b)x^2 + A(18k + 6a)x + 6A = 1$. D'après la question précédente, les coefficients devant x^3, devant x^2 et devant x s'annulent (ce sont

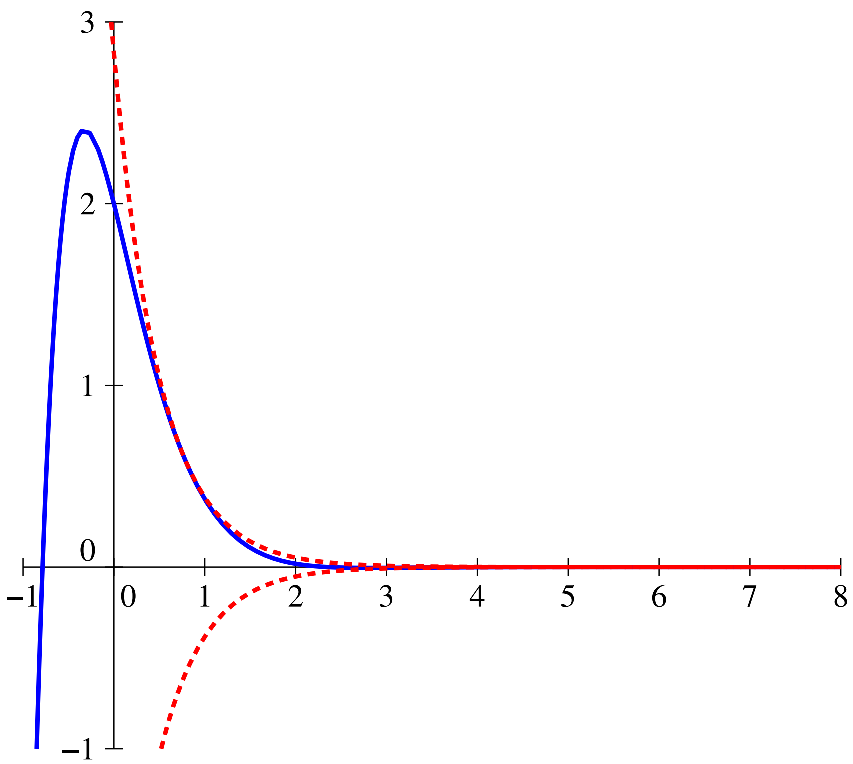
ceux qu'on a calculés à un facteur près) et il ne reste donc que la condition $6A = 1$ à vérifier. Autrement dit, $y_p : x \mapsto \frac{1}{6}x^3e^{kx}$ est solution particulière de (E).

5. Supposons donc que $y_1''' + ay_1'' + by_1' + cy_1 = d_1(x)$, et que $y_2''' + ay_2'' + by_2' + cy_2 = d_2(x)$, alors il suffit d'additionner les deux équations et d'appliquer la linéarité de la dérivation pour obtenir $(y_1 + y_2)''' + a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = d_1(x) + d_2(x)$, ce qui est exactement l'énoncé du principe de superposition.

B. Un cas particulier.

1. Posons donc $y(x) = e^{-2x}\cos(x)$, alors $y'(x) = -2e^{-2x}\cos(x) - e^{-2x}\sin(x) = (-2\cos(x) - \sin(x))e^{-2x}$, puis $y''(x) = (4\cos(x) + 2\sin(x))e^{-2x} + (2\sin(x) - \cos(x))e^{-2x} = (3\cos(x) + 4\sin(x))$, et enfin $y'''(x) = (-6\cos(x) - 8\sin(x))e^{-2x} + (-3\sin(x) + 4\cos(x))e^{-2x} = (-2\cos(x) - 11\sin(x))e^{-2x}$. On remplace tout dans le membre de gauche de l'équation : $y'''(x) + 5y''(x) + 9y'(x) + 5y(x) = e^{-2x}(-2\cos(x) - 11\sin(x) + 15\cos(x) + 20\sin(x) - 18\cos(x) - 9\sin(x) + 5\cos(x)) = 0$, ce qui prouve que y est solution de (H_1).
2. L'équation $r^3 + 5r^2 + 9r + 5 = 0$ admet $r = -1$ comme solution évidente : $-1 + 5 - 9 + 5 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme $r^3 + 5r^2 + 9r + 5 = (r + 1)(ar^2 + br + c) = ar^3 + (a + b)r^2 + (b + c)r + c$. Par identification des coefficients, $a = 1$, puis $a + b = 5$, donc $b = 4$, et $b + c = 9$ donc $c = 5$, ce qui est cohérent avec l'équation du coefficient constant. Reste à chercher les racines de $r^2 + 4r + 5 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$ et admet donc pour racines $r_1 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$ et $r_2 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1, -2 + i, -2 - i\}$.
3. C'est la même démonstration que pour le deuxième ordre : si $y(x) = e^{rx}$, alors $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$ et $y'''(x) = r^3e^{rx}$, donc la fonction y est solution de (H_1) si et seulement si $e^{kx}(r^3 + 5r^2 + 9r + 5) = 0$, donc si r est solution de l'équation caractéristique.
4. Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto e^{-2x+ix}$ et $x \mapsto e^{-2x-ix}$ sont donc solutions de (H_1). D'après le principe de superposition, toute addition de deux solutions de (H_1) est encore solution de (H_1) et de même pour tout multiple d'une solution de (H_1) (ça c'est évident, le membre de gauche de l'équation étant simplement multiplié par une constante). En particulier, $x \mapsto \frac{e^{-2x+ix} + e^{-2x-ix}}{2} = e^{-2x} \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = e^{-2x}\cos(x)$ est aussi solution de (H_1). De même, $x \mapsto \frac{e^{-2x+ix} - e^{-2x-ix}}{2i} = e^{-2x}\sin(x)$ est aussi solution. Toutes les fonctions proposées dans l'énoncé sont donc également solutions de (H_1) par superposition.
5. (a) En effet, $z' = y''' + 4y'' + 5y'$, donc $z' + z = y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.
   (b) Aucun calcul nécessaire, les solutions sont toutes les fonctions de la forme $z : x \mapsto Ke^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   (c) Il s'agit d'une équation du second ordre à coefficients constants. On a déjà résolution l'équation caractéristique plus haut, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-2x}\cos(x) + Be^{-2x}\sin(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Reste à trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = Le^{-x}$. On aura alors $y_p'(x) = -Le^{-x}$, puis $y_p'' = y_p$ et y_p est solution de l'équation si $L - 4L + 5L = \lambda$, soit $L = \frac{\lambda}{2}$. Les solutions de notre équation sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\cos(x)e^{-2x} + B\sin(x)e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, avec $(A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3$.
   (d) Il n'y a en fait presque rien à rédiger : si y est solution de (H_1), alors z est solution de $z' + z = 0$, donc $z = y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$ pour un certain réel λ. D'après la question précédente, y est alors nécessairement de la forme $x \mapsto A\cos(x)e^{-2x} + B\sin(x)e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, ce qui prouve bien la réciproque souhaitée (il suffit de renommer les constantes).
6. Avec les notations de la question 4, on a donc $y'(x) = -Ae^{-x} - 2B\cos(x)e^{-2x} - B\sin(x)e^{-2x} - 2C\sin(x)e^{-2x} + C\cos(x)e^{-2x}$, puis $y''(x) = Ae^{-x} + 3B\cos(x)e^{-2x} + 4B\sin(x)e^{-2x} - 4C\cos(x)e^{-2x} + 3C\sin(x)e^{-2x}$. Les conditions proposées imposent donc $A + B = 2$, $-A - 2B + C = -2$ et $A + 3B - 4C = -2$. Pour une fois, on va procéder par substitution : $A = 2 - B$, donc en remplaçant dans la deuxième équation $-B + C = 0$, soit $C = B$. On remplace tout dans la troisième équation : $2 - B + 3B - 4B = -2$, soit $-2B = -4$, donc $B = 2$, dont on déduit $C = 2$ et $A = 0$. Finalement, $y_0(x) = 2(\cos(x) + \sin(x))e^{-2x}$.

7. La fonction y_0 s'annule quand $\cos(x) + \sin(x) = 0$, donc si $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Ceci ne peut se produire que si $x \equiv -\frac{\pi}{2} - x[2\pi]$, donc $x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.
8. Il s'agit d'une fonction sinusoïdale pondérée par une exponentielle décroissante, on a déjà croisé ce type de courbes en cours. Ici, le problème si on essaie vraiment de tracer correctement la courbe est que l'exponentielle tend trop vite vers 0, ce qui « écrase » très rapidement les variations périodiques. En pratique, à une échelle raisonnable, on ne voit rien (en pointillés rouges, les deux exponentielles opposées qui encadrent la courbe de la fonction y_0) :



9. On connait déjà les solutions de l'équation homogène, il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière. On va pour cela procéder par superposition (en écrivant $34\,\mathrm{ch}(2x) = 17e^{2x} + 17e^{-2x}$) : cherchons d'abord une solution y_1 de l'équation $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 17e^{2x}$ sous la forme $y_1(x) = Ke^{2x}$. On aura alors $y_1'(x) = 2Ke^{2x}$, $y_1''(x) = 4Ke^{2x}$ et $y_1'''(x) = 8Ke^{2x}$, donc y_1 convient si $8K + 20K + 18K + 5K = 17$, soit $K = \frac{17}{51} = \frac{1}{3}$. De même, on cherche une solution y_2 de l'équation $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 17e^{-2x}$ sous la forme $y_2(x) = Le^{2x}$. On aura alors $y_2'(x) = -2Le^{2x}$, $y_2''(x) = 4Le^{2x}$ et $y_2'''(x) = -8Le^{2x}$, donc y_2 convient si $-8L + 20L - 18L + 5L = 17$, soit $L = -17$. Par superposition, la fonction $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + 17e^{-2x}$ est donc solution particulière de notre équation, dont toutes les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^{-x} + B\cos(x)e^{-2x} + C\sin(x)e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{2x} + 17e^{-2x}$.