Devoir Surveillé n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

2 décembre 2021

Exercice 0

Résoudre l'équation différentielle $2y'' - 5y' + 3y = xe^x$.

Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle du second ordre (E) : $4x^2y'' + y = 4\sqrt{x}$, qu'on cherche à résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Pourquoi ne sait-on pas résoudre cette équation avec les méthodes vues en cours (deux raisons au moins) ?
2. On effectue le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que la fonction z définie par $y(x) = z(t)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre $4z''(t) - 4z'(t) + z(t) = 4e^{\frac{t}{2}}$.
3. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente, et en déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution de l'équation (E) vérifiant les conditions initiales $y(1) = 4$ et $y'(1) = -\dfrac{1}{2}$. On notera désormais f la fonction correspondante.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
6. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
7. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$? Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de la fonction f ?
8. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f (pour aider au tracé de la courbe, on donne $\dfrac{1}{e} \simeq 0.37$ et $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$).

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + 2x)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il (soyez le plus précis possible) ? On va résoudre (E) sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, pourquoi ce choix d'intervalle ?
2. Déterminer une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $y_p : x \mapsto e^{kx}$ soit solution de (E).
3. On pose désormais $z(x) = e^{2x}y(x)$. Montrer que la dérivée z' de la nouvelle fonction inconnue est solution d'une équation linéaire du premier ordre (E').
4. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x + 6}{2x + 1}$ sur l'intervalle I.
5. Résoudre l'équation (E') sur l'intervalle I.
6. En déduire les solutions de (E) sur ce même intervalle.
7. On admet que les formules obtenues pour les solutions sur I resteraient valables sur l'intervalle $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ (avec des constantes éventuelles différentes). Existe-t-il des solutions de l'équation (E) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (pour cela, il faut recoller les solutions sur les deux intervalles de façon à ce que les limites en $-\dfrac{1}{2}$ de y, de y' et de y'' soient identiques) ?

8. Déterminer l'unique solution y de l'équation (E) vérifiant $y(0) = 1$ et pour laquelle la tangente à la courbe intégrale en son point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses pour $x = 1$.
9. On pose $y(x) = \frac{1}{2}(1 + 4x^2) + \frac{1}{2}e^{-2x}$.
   (a) Calculer $y''(x)$, que peut-on en déduire pour la fonction y ?
   (b) Montrer que y' s'annule en une unique valeur α vérifiant $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.
   (c) Montrer que $y(\alpha) = 2\alpha^2 + 2\alpha + \frac{1}{2}$, en déduire un encadrement de $y(\alpha)$.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de y. On précisera en particulier la valeur de $y\left(-\frac{1}{2}\right)$.
   (e) Tracer une allure la plus précise possible de la courbe représentative de la fonction y, en tenant compte de tous les calculs effectués.

Problème : à propos des équations différentielles d'ordre 3.

On considère dans tout ce problème une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants du type

$$(E) : y''' + ay'' + by' + cy = d(x)$$

(où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d est une fonction continue sur $\mathbb{R}$). Par analogie avec l'ordre 2, on associera à (E) l'équation homogène $(H) : y''' + ay'' + by' + cy = 0$

ainsi que l'équation caractéristique $(E_c) : r^3 + ar^2 + br + c = 0$.

A. Généralités.

1. On suppose que la fonction f est une solution particulière de l'équation (E). Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de (H).
2. On suppose dans cette question que $d(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Montrer que, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique (E_c), il existe une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = Ae^{kx}$.
3. On suppose toujours $d(x) = e^{kx}$ mais cette fois, k est racine triple de l'équation caractéristique (E_c) (autrement dit, (E_c) peut se factoriser sous la forme $(r - k)^3 = 0$). Vérifier que $6k + 2a = 3k^2 + 2ak + b = k^3 + ak^2 + bk + c = 0$.
4. Montrer que, dans ce cas, l'équation (E) admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Ax^3e^{kx}$.
5. Montrer que le principe de superposition reste valable pour des équations linéaires à coefficients constants d'ordre 3.

B. Un cas particulier.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation homogène $(H_1) : y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{-2x}\cos(x)$ est solution de (H_1).
2. Résoudre l'équation caractéristique associée à (H_1).
3. Montrer que, si r est racine de l'équation caractéristique précédente, $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H_1).
4. En déduire que toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}\cos(x) + Ce^{-2x}\sin(x)$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, sont solutions de (H_1).
5. On veut prouver la réciproque du résultat précédent. On considère une fonction y solution de H_1 et on pose $z = y'' + 4y' + 5y$.
   (a) Montrer que z est solution de l'équation $z' + z = 0$.
   (b) Résoudre l'équation obtenue à la question précédente.
   (c) Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire la réciproque souhaitée (question à rédiger rigoureusement).
6. Déterminer l'unique solution y_0 de l'équation (H_1) vérifiant les conditions initiales $y_0(0) = 2$, $y_0'(0) = -2$ et $y_0''(0) = -2$.
7. Résoudre l'équation $y_0(x) = 0$.
8. Donner une allure de la courbe représentative de la fonction y_0 (sans chercher à la justifier).
9. Pour finir en beauté, résoudre entièrement l'équation différentielle $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 34\,\mathrm{ch}(2x)$.