Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 novembre 2021

Exercice 1

1. On va bien sûr effectuer un brillant pivot de Gauss :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & + & 4z & = & 16 & \\ 4x & - & 2y & + & 3z & = & 9 & \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 8x & + & 3y & + & 2z & = & 20 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & + & 4z & = & 16 & \\ 8x & & & + & 11z & = & 41 & \\ 2x & & & - & 10z & = & -28 & \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 16 \\ 8x & & & + & 11z & = & 41 \\ & & & & -51z & = & -153 \end{array}\right.$$
Il ne reste plus qu'à remonter le système : $z = \dfrac{153}{51} = 3$, puis $x = \dfrac{41-33}{8} = 1$ et $y = 16 - 2 - 12 = 2$. On conclut : $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$.
2. Soyons honnêtes, ce système donne des calculs sans intérêt qui ne correspondent pas à ce que j'avais en tête, c'est nettement plus intéressant avec un + dans le coefficient de y sur la dernière ligne :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & (m+1)z & = & 2 & \\ mx & + & 2my & + & mz & = & m+1 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ x & + & (m+1)y & - & 5z & = & 5 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & (m+1)z & = & 2 & \\ & & my & - & m^2z & = & 1-m & \\ & & my & - & (m+6)z & = & 3 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (m+1)z & = & 2 \\ & & my & - & m^2z & = & 1-m \\ & & & & (m^2-m-6)z & = & m+2 \end{array}\right.$$
Pour que ce dernier système soit de Cramer, on doit avoir $m \neq 0$ (à cause du coefficient de y dans la deuxième ligne) et $m^2 - m - 6 \neq 0$, donc $m \neq -2$ et $m \neq 3$. Séparons donc différents cas :
   - si $m = 0$, la deuxième équation devient impossible, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
   - si $m = -2$, la dernière équation devient $0 = 0$ qui est toujours vérifiée. On remonte alors : $-2y - 4z = 3$, donc $y = -2z - \dfrac{3}{2}$, puis $x = 2 - y + z = \dfrac{1}{2} + 3z$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{2} + 3z, -2z - \dfrac{3}{2}, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$.
   - si $m = 3$, la dernière équation devient impossible, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
   - enfin, si $m \notin \{-2, 0, 3\}$, on calcule $z = \dfrac{m+2}{(m+2)(m-3)} = \dfrac{1}{m-3}$, puis $y = \dfrac{1}{m} - 1 + mz = \dfrac{m - 3 - m^2 + 3m + m^2}{m^2 - 3m} = \dfrac{4m-3}{m^2-3m}$ et enfin $x = 2 - y - (m+1)z =$

$$\frac{2m^2-6m-4m+3-m^2-m}{m^2-3m}=\frac{m^2-11m+3}{m^2-3m}.$$

Exercice 2

1. On a évidemment $p_0=1$ (une seule zone tant qu'on n'a pas tracé de droite !), $p_1=2$ et $p_2=4$ (les deux droites séparent le plan en quatre quarts de plan). Plus intéressant, on obtient $p_4=11$, je vous épargne le dessin que vous êtes capables de faire tout seuls.
2. C'est en fait très simple : si on veut un nombre maximal de zones, il faut que chaque nouvelle droite tracée coupe chacune des précédentes. Pour passer de n droites à $n+1$ droites, on ajoutera donc n points d'intersection entre droites. Or, la nouvelle droite va créer une nouvelle zone en coupant en deux chacune des régions qui vont éêtre traversées par un segment reliant deux points d'intersection consécutifs (ou le premier/dernier point d'intersection et « l'infini »). Il y a donc $n+1$ zones qui vont être coupées en deux lors de l'ajout de la droite numéro $n+1$ (en notant P_1, …, P_n les points d'intersection, la zone contenant la demi-droite $]\infty,P_1]$, puis celle contenant le segment $[P_1P_2]$ etc, jusqu'à celle contenant $[P_{n-1}P_n]$ et enfin celle contenant la demi-droite $[P_n\infty[$). On en déduit tout simplement que $p_{n+1}=p_n+n+1$ (ce qui est totalement cohérent avec les formules obtenues pour les premières valeurs de p_n).
3. On obtient donc la valeur de p_n en partant de $p_0=1$ et en additionnant les entiers jusqu'à n. Autrement dit, $p_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$. Cette expression ne se factorise pas. Si on veut la démontrer par récurrence à l'aide de la relation obtenue à la question précédente, c'est très facile : ça marche pour $n=0$ (ça donne bien la valeur 1), et en supposant la formule vraie au rang n, alors $p_{n+1}=p_n+n+1=\dfrac{n^2+n+2}{2}+n+1=\dfrac{n^2+3n+4}{2}=\dfrac{(n+1)^2+n+1+2}{2}$.
4. En reprenant le raisonnement précédent, on constate que parmi les régions coupées en deux par l'ajout d'une nouvelle droite, il n'y en a que deux qui ne sont pas bornées (la première et la dernière zone traversées), sauf bien sûr pour la première droite tracée. En notant p'_n le nombre de zones non bornées, on a donc $p'_0=1$, $p'_1=2$ et $\forall n\geqslant 1$, $p'_{n+1}=p'_n+2$, ce qui donne $p'_n=2n$ à partir de $n=1$. On en déduit le nombre de zones bornées par une simple soustraction : $p_n-p'_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}-2n=\dfrac{n^2-3n+2}{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Cette formule n'est évidemment pas valable quand $n=0$.
5. Le principe est en fait le même qu'en dimension 2. Si on veut un maximum de zones, il faut que chaque plan rajouté coupe chacun des n plans précédents suivant une droite. Si on trace ces intersections dans le nouveau plan ajouté, on va obtenir un schéma contenant n droites se coupant en formant un maximum de régions, autrement dit un schéma avec p_n régions ! Et chacune de ces régions joue en fait le rôle des segments cités dans la question 2, elle va former la zone frontière entre deux nouvelles zones de l'espace qui n'en formaient qu'une seule avant ajout du plan numéro $n+1$. Autrement dit, cet ajout de plan va augmenter le nombre de zones d'un nombre égal à ce nombre de régions, soit p_n. On a donc bien $q_{n+1}=q_n+p_n$.

   En utilisant la formule déjà obtenue pour p_n, on a donc $q_n=1+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}=1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{12}+\frac{n(n-1)}{4}+\frac{2n}{2}=\frac{2n^3-3n^2+n+3n^2-3n+12n+12}{12}=\frac{2n^3+10n+12}{12}=\frac{n^3+5n+6}{6}=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$.
6. Vérifions donc : $\dbinom{n}{0}+\dbinom{n}{1}+\dbinom{n}{2}=1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+2n+2}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}=p_n$,

puis $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^3-3n^2+2n+3n^2-3n+6n+6}{6} = \frac{n^3+5n+6}{6} = q_n$.

Exercice 3

1. Posons donc $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ et calculons $P(x+1)-P(x) = a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e-ax^4-bx^3-cx^2-dx-e$. En développant tout brutalement à coups de binôme de Newton et en simplifiant, il reste $P(x+1)-P(x) = a(4x^3+6x^2+4x+1)+b(3x^2+3x+1)+c(2x+1)+d = x^3$. On procède alors à une identification des coefficients : $4a = 1$, donc $a = \frac{1}{4}$, puis $6a+3b = 0$ donc $b = -2a = -\frac{1}{2}$, et $4a+3b+2c = 0$, donc $2c = -1+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$. Enfin, le coefficient constant $a+b+c+d = 0$ impose simplement $d = 0$. Le coefficient e peut être choisi librement puisqu'il n'intervient pas dans les conditions obtenues, on posera simplement $e = 0$. Autrement dit, $P(x) = \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2$.

2. C'est une somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n} P(k+1)-P(k) = \sum_{k=1}^{n+1} P(k)-\sum_{k=0}^{n} P(k) = P(n+1)-P(0)$. Ici, comme $P(0) = 0$, on garde simplement le terme $P(n+1)$.

3. On sait que $P(k+1)-P(k) = k^3$, donc $\sum_{k=0}^{n} P(k+1)-P(k) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = P(n+1)$. Il ne reste donc plus qu'à calculer $P(n+1) = \frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2((n+1)^2-2(n+1)+1}{4} = \frac{(n+1)^2n^2}{4}$, soit exactement la formule connue.

4. Pour que ça fonctionne, il va falloir cette fois-ci partir d'un polynôme de degré 5. Posons donc $Q(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex$ (pas besoin de coefficient constant, il disparaitra à nouveau des calculs), et calculons $Q(x+1)-Q(x) = a(5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)+b(4x^3+6x^2+4x+1)+c(3x^2+3x+1)+d(2x+1)+e$. On souhaite que cette expression s'identifie à x^4, ce qui donne les conditions $5a = 1$, donc $a = \frac{1}{5}$, $10a+4b = 0$, donc $b = -\frac{5}{2}a = -\frac{1}{2}$, $10a+6b+3c = 0$, donc $c = \frac{1}{3}$, $5a+4b+3c+2d = 0$ donc $d = 0$ et $a+b+c+d+e = 0$ donc $e = -\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{30}$. Bon, au moins on sait pourquoi on a un dénominateur 30 dans la formule donnée par l'énoncé. On a donc obtenu $Q(x) = \frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x$. Le même télescopage qu'à la question 2 va bien sûr prouver que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = Q(n+1)$, il ne reste plus qu'à factoriser cette dernière valeur : $Q(n+1) = \frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}(n+1) = \frac{n+1}{30}(6(n+1)^4-15(n+1)^3+10(n+1)^2-1)$. Développons entièrement cette dernière parenthèse, qui est égale à $6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-45n^2-45n-15+10n^2+20n+10-1 = 6n^4+9n^3+n^2-n = n(6n^3+9n^2+n-1)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que le dernier facteur est correct : $(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^3+6n^2-2n+3n^2+3n-1 = 6n^3+9n^2-n-1$. C'est bon, on a bien prouvé que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

5. Il faut juste être un peu courageux. Déjà, vérifions la formule pour $n = 1$ (ça marche évidemment pour $n = 0$ mais c'est trop facile) : $\frac{1\times 2\times 3\times 5}{30} = 1$, c'est bon. Supposons désormais la formule vraie au rang n, alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4+(n+1)^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+$

$(n+1)^4 = \dfrac{n+1}{30} \times [6n^4+9n^3+n^2-n+30(n^3+3n^2+3n+1)] = \dfrac{(n+1)^4}{30} \times (6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)$. Pour que la récurrence fonctionne, ce dernier facteur devrait être égal (en décalant la formule et en enlevant le $n+1$ déjà mis en facteur) à $(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1) = (2n^2+7n+6)(3n^2+9n+5) = 6n^4+18n^3+10n^2+21n^3+63n^2+35n+18n^2+54n+30 = 6n^4+39n^3+91n^2+89n+30$. Incroyable, ça marche ! Je suis sûr que vous êtes déçus de vous arrêter là et que vous auriez adoré chercher une formule similaire pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^5$.

Exercice 4

1. Toutes les expressions à l'intérieur des ln sont strictement positives, les fonctions correspondantes sont donc définies et continue sur l'intervalle $[1, a]$ (on a bien supposé $a > 0$ pour qu'il n'y ait de problème des définition des facteurs $\dfrac{1}{x}$ sur les intervalles $[1, a]$), elles admettent donc des primitives et les intégrales existent.
2. Posons donc $x = t\sqrt{a}$, ce qui implique $dx = \sqrt{a}\ dt$, et transforme les bornes de l'intégrale en $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ et $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On obtient alors $J(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t\sqrt{a}} \ln(a^2t^4+a^2) \times \sqrt{a}\ dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{\ln(a^2)}{t}\ dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4+1)\ dt = [2\ln(a)\ln(t)]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4+1)\ dt = 2\ln(a)\ln(\sqrt{a}) + 2\ln(a)\ln(\sqrt{a}) + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4+1)\ dt = 2\ln^2(a) + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4+1)\ dt$.
3. On va simplement poser cette fois-ci $x = at$, donc $dx = a\ dt$, pour obtenir $K(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{at} \ln(a^2t^2+a^2) \times a\ dt = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(a^2)\ dt + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\ dt = [2\ln(a)\ln(t)]_{\frac{1}{a}}^{1} + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\ dt = -2\ln(a)\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\ dt = 2\ln^2(a) + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\ dt$.
4. (a) Avec les notations gentiment proposées par l'énoncé, $H(a) = F(1) - F\left(\dfrac{1}{a}\right)$, donc $H'(a) = \dfrac{1}{a^2} F'\left(\dfrac{1}{a}\right)$. Or, par définition, $F'(t) = \dfrac{1}{t}\ln(t^2+1)$, donc $H'(a) = \dfrac{1}{a^2} \times a \ln\left(\dfrac{1}{a^2}+1\right) = \dfrac{\ln(a^2+1) - \ln(a^2)}{a}$.

   (b) Pour ne pas surcharger, j'utilise la même notation F pour la primitive incalculable, même si la fonction n'est en fait pas la même. On a ici $G(a) = F(\sqrt{a}) - F\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$, donc $G'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} F'(\sqrt{a}) + \dfrac{1}{2a\sqrt{a}} F'\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$, avec par définition $F'(t) = \dfrac{1}{t}\ln(t^4+1)$. On en déduit que $G'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \times \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln(a^2+1) + \dfrac{1}{2a\sqrt{a}} \times \sqrt{a} \ln\left(\dfrac{1}{a^2}+1\right) = \dfrac{\ln(a^2+1)}{2a} + \dfrac{\ln(a^2+1) - \ln(a^2)}{2a} = \dfrac{\ln(a^2+1) - \ln(a)}{a}$.

   (c) On trouve finalement, après petite simplification, que $G'(a) - H'(a) = \dfrac{\ln(a)}{a}$. On reconnait ici une dérivée de la forme uu', donc $G(a) - H(a) = \dfrac{1}{2}\ln^2(a) + Z$, où Z est une constante d'intégration réelle. Or, il est évident que $G(1) - H(1) = 0$ (les bornes des intégrales sont toutes égales à 1 dans ce cas) donc la constante Z est nulle et $G(a) - H(a) = \dfrac{1}{2}\ln^2(a)$.

Il ne reste plus qu'à remonter : $J(a) - K(a) = \frac{1}{2}\ln^2(a)$ (les autres termes se simplifient) puis $I(a) = \frac{1}{2}\ln^2(a)$ en séparant simplement les ln dans l'intégrale initiale.

Problème

1. L'intégrale I_n existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, et $I_0 = \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$.
2. Effectuons donc une IPP en posant logiquement $u(x) = \ln^{n+1}(x)$, donc $u'(x) = \frac{(n+1)\ln^n(x)}{x}$, et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ qu'on va intégrer en $v(x) = -\frac{1}{x}$. On obtient alors $I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x}\ln^n(x)\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\,dx = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$. Appliquée à $n = 0$ puis $n = 1$, la formule donne $I_1 = I_0 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$, puis $I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.
3. Posons donc $t = \ln(x)$, ou $x = e^t$, ce qui implique que $dx = e^t\,dt$. Les bornes de l'intégrale vont devenir égales à 0 et 1, et on a donc $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{e^{2t}} \times e^t\,dt = \int_0^1 \frac{t^n}{e^t}\,dt$.
4. Sur l'intervalle $[0,1]$, on peut écrire $1 \leqslant e^t \leqslant e$, donc $\frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{e^t} \leqslant 1$, et $\frac{t^n}{e} \leqslant \frac{t^n}{e^t} \leqslant t^n$. Seule l'inégalité de droite nous intéresse ici, elle permet d'affirmer que $I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. La positivité de I_n est par aulleurs évidente en tant qu'intégrale d'une fonction positive sur une segment. Le théorème des gendarmes donne alors $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
5. Les calculs effectués en début d'exercice assurent l'existence des premiers entiers de la suite (a_n), et on a même $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 5$. Prouvons l'existence générale par récurrence : elle est déjà vérifiée au rang 0, supposons-la donc vraie au rang n. Alors, en appliquant la relation prouvée en question 2, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e} = (n+1)\left(n! - \frac{a_n}{e}\right) - \frac{1}{e} = (n+1)! - \frac{(n+1)a_n + 1}{e}$. Cette égalité prouve la propriété au rang $n+1$ et en même temps montre la relation de récurrence $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$.
6. On sait que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} n! - \frac{a_n}{e} = 0$. Cela impose bien évidemment $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, et de plus (en divisant tout par $n!$), $\underset{n\to+\infty}{1} - \frac{a_n}{n!e}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!} = e$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n} = \frac{1}{e}$.
7. Puisqu'on dispose d'une relation de récurrence, prouvons l'inégalité par récurrence : $a_0 = 1 \geqslant 0 = 1$, donc l'initialisation fonctionne. Supposons maintenant $a_n \geqslant n!$, alors $a_{n+1} \geqslant (n+1) \times n! + 1 = (n+1)! + 1 \geqslant (n+1)!$, ce qui prouve l'hérédité et achève donc la récurrence. Or, on sait que $\frac{n!}{a_n} - \frac{1}{e} = \frac{I_n}{a_n}$, avec $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. On en déduit facilement $0 \leqslant \frac{n!}{a_n} - \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$.
8. (a) D'après la question précédente, $\frac{n!}{a_n}$ fournit une valeur approchée de $\frac{1}{e}$ à $\frac{1}{(n+1)!}$ près. Il suffit donc de choisir un entier n pour lequel $(n+1)! > 1000$ ($n = 6$ conviendra) et de calculer $\frac{n!}{a_n}$. Ici, on calcule donc par récurrence $a_3 = 3a_2 + 1 = 16$ puis $a_4 = 4 \times 16 + 1 = 65$, $a_5 = 5 \times 65 + 1 = 326$ et enfin $a_6 = 6 \times 326 + 1 = 1957$ pour en déduire que la valeur approchée recherchée serait $\frac{720}{1\ 957}$.

(b) Encore une récurrence ? Allons-y : la propriété est évidente au rang 0, supposons-la vraie au rang n. On peut alors écrire $a_{n+1} = (n+1) \times n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 1 = (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$, ce qui prouve l'hérédité et achève notre récurrence. Comme la somme des inverses des factorielles débute avec deux termes égaux à 1 (si $n \geqslant 1$ bien entendu), l'inégalité $a_n \geqslant 2 \times n!$ en découle trivialement.

(c) On peut remonter le calcul, notre valeur approchée est en fait valable à $\frac{1}{2(n+1)!}$ près, et prendre $\frac{5!}{a_5}$ comme valeur approchée est suffisant pour assurer une précision de 10^{-3} puisque $2 \times 6! > 1\ 000$. Autrement dit, $\frac{120}{326} = \frac{60}{163}$ était déjà une bonne approximation de $\frac{1}{e}$.

9. $I_n = n! - \frac{a_n}{e}$, donc $en! - a_n = eI_n$, ce qui implique vu les inégalités prouvées en cours d'exercice que $en! - \frac{e}{2(n+1)!} \leqslant a_n \leqslant en!$. Or, pour $n \geqslant 2$, $2(n+1)! > e$, donc $en! - 1 < en! - \frac{e}{2(n+1)!}$, ce qui prouve que le nombre a_n est un entier naturel compris (strictement) entre $en! - 1$ et $en!$. La caractérisation de la partie entière prouve alors que $a_n = \lfloor en! \rfloor$. Pour $n = 1$, on a $\lfloor e \rfloor = 2$, ce qui correspond bien à la valeur de a_1. Par contre, ça ne marche plus pour $n = 0$ puisque la partie entière vaut alors 0 et $a_0 = 1$.