Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3

MPSI Lycée Camille Jullian

20 novembre 2021

Exercice 1

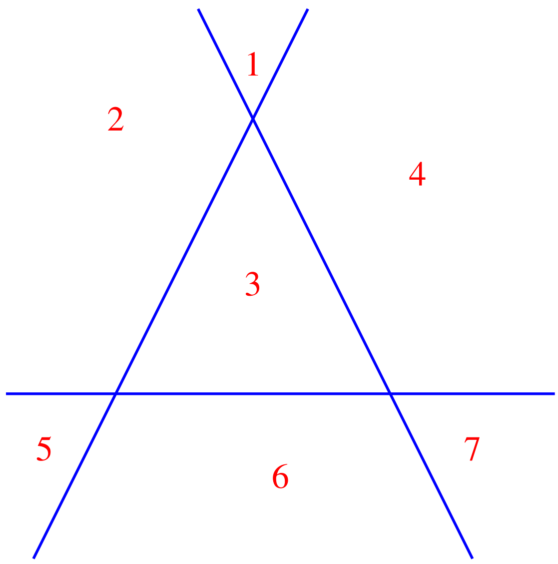
Résoudre les deux systèmes suivants (pour le second, on précisera bien entendu avec soin les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système n'est pas un système de Cramer, et on décrira précisément les solutions du système dans ces cas particuliers) :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 16 \\ 4x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 8x & + & 3y & + & 2z & = & 20 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (m+1)z & = & 2 \\ mx & + & 2my & + & mz & = & m+1 \\ x & + & (m-1)y & - & 5z & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 2

On note p_n le nombre maximal de zones du plan délimitées par n droites sécantes. Ainsi, pour $n=3$, on aura $p_3 = 7$ (illustration ci-dessous).



1. Donner les valeurs de p_0, p_1, p_2 et p_4 (un dessin suffira en guise de justification).
2. Exprimer plus généralement p_{n+1} en fonction de p_n (en justifiant la formule proposée).
3. En déduire la valeur de p_n en fonction de n (on pourra écrire une récurrence, ou exploiter un calcul de somme).

4. Parmi les p_n zones délimitées par nos n droites, combien sont bornées et combien ne le sont pas (les seules zones bornées seront toujours de forme triangulaire, dans l'exemple donné plus haut, on a une seule zone bornée et six qui ne le sont pas) ? On essaiera bien sûr de justifier les résultats avancés.
5. On définit désormais q_n comme le nombre maximal de zones de **l'espace** délimitées par n **plans** sécants (ainsi, pour $n = 3$, on aura désormais $q_3 = 8$). Déterminer la valeur de q_n en fonction de n (comme la question est difficile, je vous donne un gros indice : essayez de prouver d'abord que $q_{n+1} = q_n + p_n$, puis ensuite déduisez-en la valeur de q_n (partie que vous pouvez bien sûr faire même sans avoir réussi à justifier la relation de récurrence).
6. Vérifier que, pour tout entier naturel, $p_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$, et $q_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ (pour les plus curieux d'entre vous, cette étonnante constatation peut être généralisée en dimension supérieure).

Exercice 3

Cet exercice propose une nouvelle méthode de calcul de la somme classique $\sum_{k=1}^{n} k^3$, méthode que l'on étendra ensuite à la somme $\sum_{k=1}^{n} k^4$ pour laquelle nous n'avons pas vu de formule en cours.

1. Déterminer un polynôme P du quatrième degré vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^3$.
2. Comment peut-on exprimer de façon plus simple la somme $\sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k)$? (question totalement indépendante de la précédente, qui ne nécessite pas de connaitre les coefficients du polynôme P)
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = P(n+1)$, puis conclure (on s'arrangera bien sûr pour retrouver la forme factorisée bien connue pour cette somme).
4. En utilisant la même méthode que ci-dessus, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.
5. Redémontrer cette dernière formule par récurrence.

Exercice 4

On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^4+a^2}{x^2+a^2}\right) dx$, où $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

On posera également $J(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x} \ln(x^4+a^2)\ dx$ et $K(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x} \ln(x^2+a^2)\ dx$.

1. Justifier rapidement que les trois intégrales définies ci-dessus existent pour toute valeur strictement positive de a.
2. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{a}t$, montrer que $J(a) = 2\ln^2(a) + \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4+1)\ dt$.
3. À l'aide d'un changement de variable similaire au précédent, montrer que $K(a) = 2\ln^2(a) + \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\ dt$.

4. On note enfin $G(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}\ln(t^4+1)\ dt$ et $H(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t}\ln(t^2+1)\ dt$.

   (a) Calculer la dérivée de la fonction H (on pourra noter F une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln(t^2+1)$, et exprimer $H(a)$ en fonction de F, sans chercher à calculer cette dernière, puis dériver l'expression obtenue en faisant attention aux composées présentes et au fait que la variable est bien entendu a).

   (b) En appliquant la même méthode qu'à la question précédente, dériver la fonction G.

   (c) En déduire une expression simplifiée de $G(a) - H(a)$, puis conclure enfin sur la valeur de $I(a)$.

Problème

On pose dans cet exercice $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\ dx$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence de I_n, et calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire les valeurs de I_1 et de I_2.
3. À l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que $I_n = \displaystyle\int_a^b t^n g(t)\ dt$, où g est une fonction à préciser, ainsi que les nouvelles bornes de l'intégrale.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ (on rappelle le principe d'intégration des inégalités : si l'inégalité $f(t) \leqslant g(t)$ est vraie sur tout le segment $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$). Quelle est la limite de la suite (I_n) ?
5. Montrer qu'il existe une suite (a_n) d'entiers naturels tels que $I_n = n! - \dfrac{a_n}{e}$. Préciser la valeur de a_0, a_1 et a_2, ainsi qu'une relation de récurrence vérifiée par a_{n+1} et a_n.
6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ ainsi que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$.
7. Montrer qu'on a toujours $n! \leqslant a_n$, en déduire un encadrement de $\dfrac{n!}{a_n} - \dfrac{1}{e}$ utilisant une factorielle.
8. On souhaite calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre $\dfrac{1}{e}$.

   (a) En utilisant les questions précédentes, déterminer un nombre rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ tel que $\left| r - \dfrac{1}{e} \right| \leqslant 10^{-3}$.

   (b) Montrer que $a_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire que $a_n \geqslant 2n!$ si $n \geqslant 1$.

   (c) Peut-on améliorer la réponse donnée en question a ?
9. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $a_n = \lfloor en! \rfloor$. Cette égalité reste-t-elle vraie pour $n = 1$ et $n = 0$?